1 Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1.1 Coordonnées cartésiennes

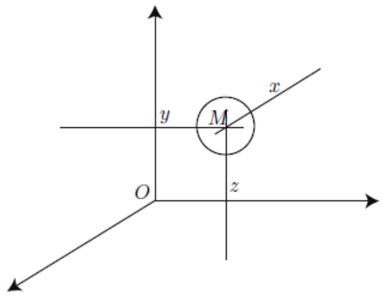
Dans le repère $\Re\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x,y,z).

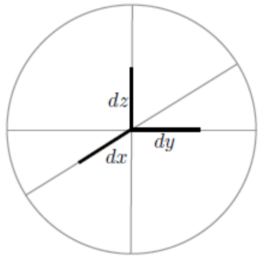
Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Re}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\Re}$$





1.2 Coordonnées cylindriques

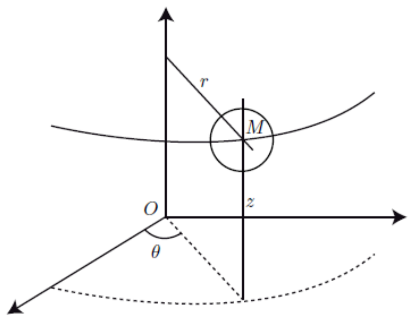
Dans le repère $\Re_{cyl}\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$, on utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z).

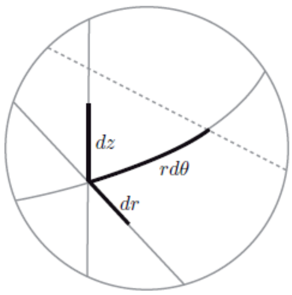
Vecteur position

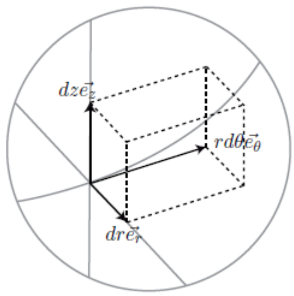
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$







1.3 Coordonnées sphériques

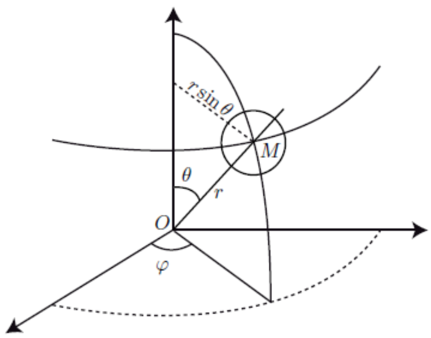
Dans le repère $\Re_{sph}\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi}\right)$, on utilise les coordonnées sphériques (r,θ,φ).

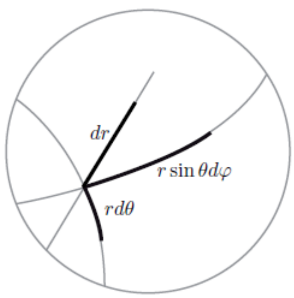
Vecteur position

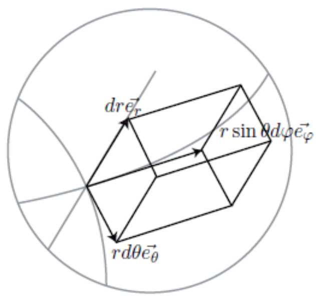
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\sin\theta d\varphi \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$





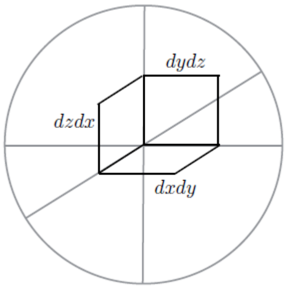


2 Surfaces et volumes élémentaires

2.1 Coordonnées cartésiennes

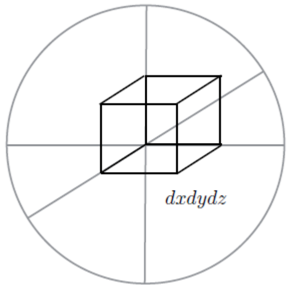
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dxdz \\ z = cte & dS = dxdy \end{cases}$$



Volume élémentaire

$$dV = dxdydz$$



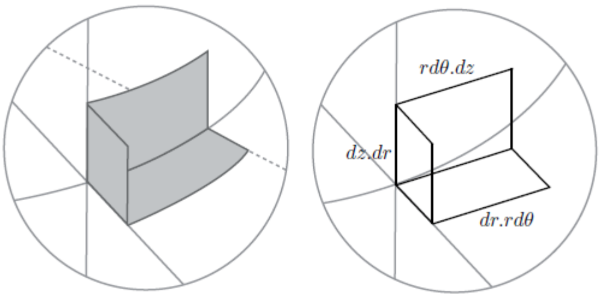
2.2 Coordonnées cylindriques

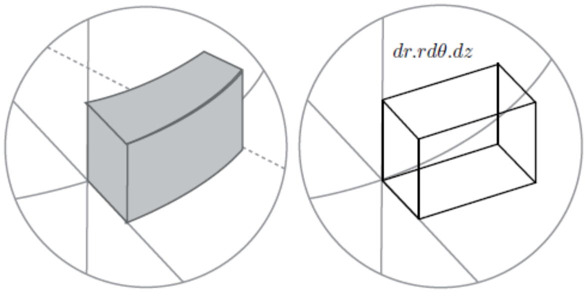
Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = rd\theta dz \\ \theta = cte & dS = drdz \\ z = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$

Volume élémentaire

$$dV = rdrd\theta dz$$





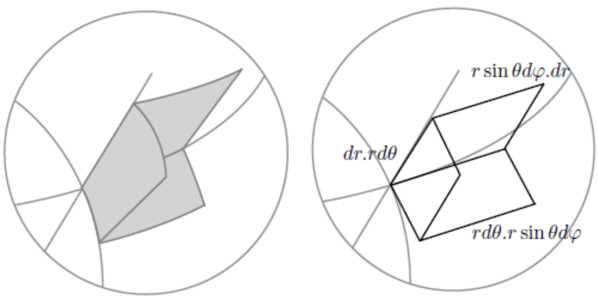
2.3 Coordonnées sphériques

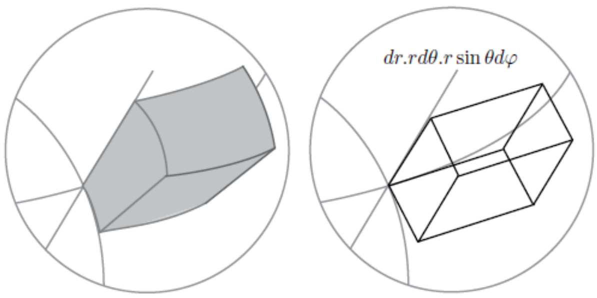
Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ \theta = cte & dS = r\sin\theta drd\varphi \\ \varphi = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$

Volume élémentaire

$$dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$





2.4 Calcul de surface et volume

Pour calculer une surface ou un volume, il faut alors intégrer les surfaces ou volumes élémentaires correspondants. Ces intégrales sont des intégrales multiples. Leur résolution est abordée dans la partie 3.

3 Fonctions de plusieurs variables

La surface et le volume étudiés précédemment sont des fonctions de plusieurs variables. La surface est une fonction de deux variables, tandis que le volume est une fonction de trois variables.
Les grandeurs qui vont être étudiées en physique-chimie cette année peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Ce sont donc aussi des fonctions de plusieurs variables.
Par exemple, la pression P pourra dépendre de x, y, z et t dans une base cartésienne : $P(x,y,z,t)$

3.1 Dérivation

Quand une fonction ne dépend que d'une seule variable, on écrit sa dérivée à l'aide de la notation d .
Par exemple, si la pression P ne dépend que de x, sa dérivée s'écrira : $\frac{dP(x)}{dx}$
Pour une fonction de plusieurs variables, on utilise la notion de dérivée partielle à l'aide de la notation ∂ .
Par exemple, dérivée partielle de la pression P par rapport à x : $\frac{\partial P(x,y,z,t)}{\partial x}$
On pourra aussi trouver une notation où l'on précisera quelles variables sont fixées.
Par exemple, pour la dérivée partielle de la pression P par rapport à x, les coordonnées y, z et le temps t sont fixés, on pourra donc aussi écrire : $\left(\frac{\partial P(x,y,z,t)}{\partial x}\right)_{y,z,t}$

3.2 Différentielle

La fonction ne dépend que d'une seule variable :
Par exemple, si la pression P ne dépend que de x, sa différentielle s'écrira : $dP = \frac{dP}{dx}dx$
La fonction dépend de plusieurs variables :
Par exemple, si la pression P dépend de x, y, z et t, sa différentielle s'écrira :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt$$

En physique-chimie, la notion de différentielle est utilisée pour noter les variations élémentaires ou infinitésimales d'une grandeur.
Par exemple, si la pression P ne dépend que de x, sa différentielle dP *représente sa variation élémentaire selon x. Pour déterminer la variation de pression* ΔP *entre deux abscisses* x_0 *et* x_1*, il faut alors intégrer* dP *entre ces valeurs. Si la pression dépend maintenant de plusieurs variables, chaque partie de sa différentielle représentera sa variation élémentaire selon la variable considérée. Ainsi, sa variation élémentaire selon x sera :* $\frac{\partial P}{\partial x}dx$
Attention, il existe aussi la notation δ que nous verrons dans le cours de thermodynamique différentielle et qui représentera une quantité infinitésimale d'une grandeur. A ne pas confondre avec les écritures d ou ∂ qui représentent des variations infinitésimales de grandeur.

3.3 Développement limité

En physique-chimie, la résolution des problèmes ne requiert souvent que la connaissance du comportement de fonctions physiques au voisinage d'un point. On cherche donc à remplacer l'expression de la fonction au voisinage d'un point donné, par une expression plus simple à manipuler et donc à étudier.
Le développement limité à l'ordre p d'une fonction f au voisinage de x_0 est donnée par la formule de Taylor :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x_0) + o(h^p)$$

On se limitera la plupart du temps au développement limité à l'ordre 1 en physique.

On peut souhaiter exprimer les petites variations (variation élémentaire) d'une grandeur autour d'un point. Dans le cours de physique-chimie, on pourra les confondre avec la différentielle de la grandeur autour de ce point.

Par exemple, si nous étudions les petites variations de la pression autour de x, on cherche :

$$P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)-P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)$$

Or d'après son développement limité, on a :

$$\begin{array}{l} P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)=P(x,y,z)+\frac{dx}{2}\frac{\partial P}{\partial x}+o\left(\frac{dx}{2}\right) \\ P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)=P(x,y,z)-\frac{dx}{2}\frac{\partial P}{\partial x}+o\left(\frac{dx}{2}\right) \end{array} \Rightarrow P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)-P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)=\frac{\partial P}{\partial x}dx$$

On retrouve la variation élémentaire de la pression selon x.

3.4 Intégration

De la même manière que pour la dérivation, une grandeur dépendant de plusieurs variables peut être intégrée par rapport à l'une de ses variables.

Par exemple, intégrale de la pression P par rapport à x : $\int P(x,y,z,t)dx$.

Lorsqu'une grandeur dépend de plusieurs paramètres de l'espace, on peut aussi l'intégrer par rapport à une surface ou à un volume.

Lorsque l'on intègre par rapport à une surface, on parle d'intégrale double.

Par exemple, pour trouver la résultante $\overrightarrow{F_S}$ *des forces de pression s'appliquant sur une surface S, on intègrera la pression P par rapport à la surface S :* $\overrightarrow{F_S}=\iint_S \overrightarrow{dF_S}=\iint_S -P(x,y,z,t)dS\vec{n}$

Lorsque l'on intègre par rapport à un volume, on parle d'intégrale triple.

Par exemple, pour trouver la résultante $\vec{P}$ *des forces de pesanteur s'appliquant sur un volume V (que l'on appelle aussi le poids), on intégrera les forces de pesanteur volumiques par rapport au volume V :* $\vec{P}=\iiint_V \overrightarrow{dF_V}=\iiint_V \mu g dV\vec{u}$

où μ *est la masse volumique du corps considéré, g l'accélération de la pesanteur et* $\vec{u}$ *un vecteur unitaire.*

Figures extraites de
http://coursdephysique.decout.org/cours_de_physique_PDF/electromagnetisme_calcul_integral.pdf