Electrostatique

1 Champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges

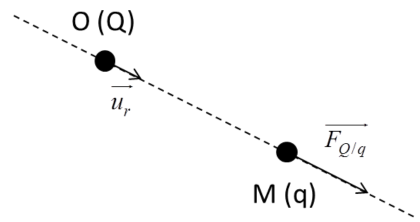
1.1 Charges électriques

Au niveau microscopique, on retrouve des particules chargées, aussi appelées **porteurs de charges**.
La charge q d'une particule microscopique est toujours un multiple entier relatif de la charge élémentaire e, de charge $e = 1{,}6.10^{-19} C$ (Coulomb).

1.2 Loi de Coulomb

Définition :
Soit une particule chargée en O de charge Q, respectivement M de charge q. On note r la distance entre ces deux points et $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire de direction O vers M, soit : $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.
La force exercée par la charge Q sur la charge q, appelée **force électrostatique (ou de Coulomb)**, s'écrit dans le vide :

$$\overrightarrow{F_{Q/q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3} \qquad (1)$$



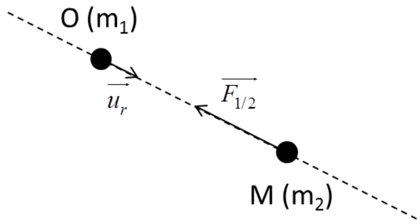
si Q et q de même signe

Remarque :
$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} F.m^{-1}$ permittivité du vide

1.2.1 Analogie avec la force gravitationnelle

Définition :
Soit une masse m_1 en O et une masse m_2 en M. On note r la distance entre ces deux points et $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire de direction O vers M. La force exercée par la masse m_1 sur la masse m_2, appelée force gravitationnelle, s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

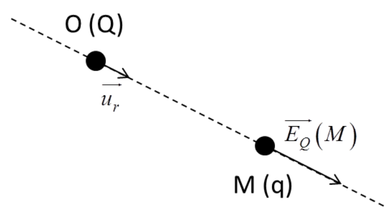


1.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

1.3.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

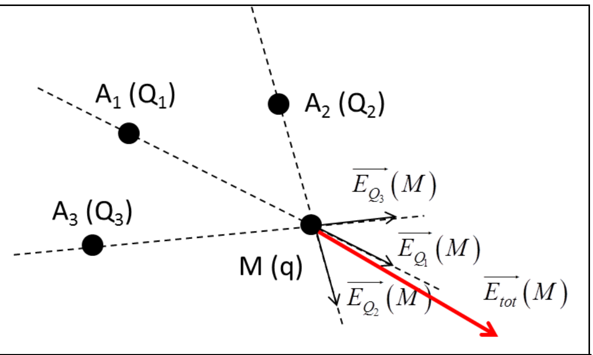
Définition :
Soit une charge ponctuelle Q située au point O, origine du repère. Si on place une charge q en un point M quelconque de l'espace. Le champ électrique (V/m) créé par Q en M est :

$$\overrightarrow{E_Q}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3} \qquad (2)$$



1.4 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Dans le cas d'une distribution de plusieurs charges ponctuelles, où l'on note Q_i la valeur de la charge portée par la particule A_i et $\overrightarrow{u_{r_i}} = \frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left(A_iM\right)^3}$, le champ électrostatique total $\overrightarrow{E_{tot}}\left(M\right)$ créé au point M est égal à la superposition des champs électrostatiques créés par chacune des charges ponctuelles Q_i au point M :



$$\overrightarrow{E_{tot}}\left(M\right) = \sum_i \overrightarrow{E_{Q_i}}\left(M\right) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_{r_i}} = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left(A_iM\right)^3} \quad (3)$$

Remarque :
C'est ce qu'on appelle le **principe de superposition**.

2 Distributions continues de charges

2.1 Distribution volumique de charge électrique

2.1.1 Définition

Définition :
On définit la **densité volumique de charges** ρ (C.m^{-3}) par :

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (4)$$

Remarque :
On retrouve la charge totale Q de la distribution volumique en intégrant la charge élémentaire sur le volume V par : $Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$

2.1.2 Calcul du champ électrostatique

La charge dq située au point P est à l'origine d'un champ électrostatique élémentaire au point M :

$$\overrightarrow{dE}\left(M\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left(PM\right)^3}dq = \frac{\rho\left(P\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left(PM\right)^3}dV \quad (5)$$

Champ électrostatique total : $\vec{E}\left(M\right) = \iiint_V \frac{\rho\left(P\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left(PM\right)^3}dV$

2.2 Distribution surfacique de charge électrique

2.2.1 Définition

Définition :
On définit la densité surfacique de charges σ (C.m^{-2}) par :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (6)$$

2.2.2 Calcul du champ électrostatique

La charge dq située au point P est à l'origine d'un champ électrostatique élémentaire au point M :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}dq = \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}dS \quad (7)$$

Champ électrostatique total : $\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}dS$

2.3 Distribution linéique de charge électrique

2.3.1 Définition

Définition :

On définit la densité linéique de charges λ (C.m^{-1}) par :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (8)$$

2.3.2 Calcul du champ électrostatique

La charge dq située au point P est à l'origine d'un champ électrostatique élémentaire au point M :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}dq = \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}dl \quad (9)$$

Champ électrostatique total : $\vec{E}(M) = \int_L \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3}dl$

3 Symétries et invariances du champ électrostatique

3.1 Principe de Curie

Principe de Curie :

Lorsque des causes produisent des effets, les symétries des causes doivent se retrouver dans celles des effets.

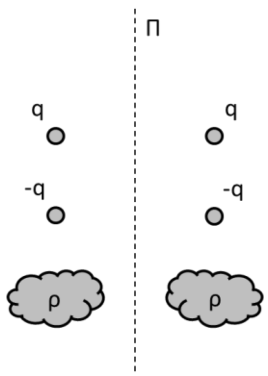
Conséquence :

La distribution de charges est à l'origine du champ électrostatique, donc le champ aura les mêmes symétries que la distribution.

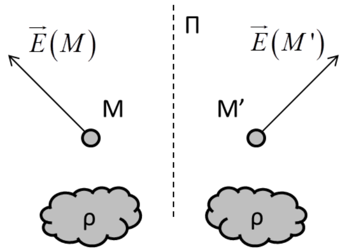
3.2 Symétries de la distribution de charges

3.2.1 Plan de symétrie

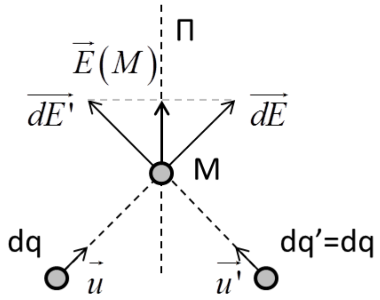
Une distribution de charge possède un plan de symétrie Π si Π est un plan de symétrique géométrique de la distribution et que les charges sont identiques de chaque côté du plan Π.

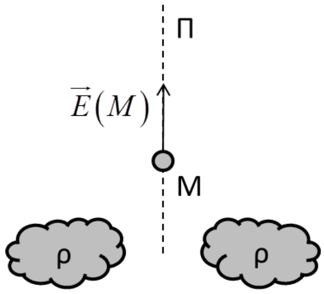


Si le plan Π est un plan de symétrique de la distribution de charge, alors en deux points M et M' symétrique par rapport au même plan Π, les champs électrostatiques seront symétriques par rapport à Π.



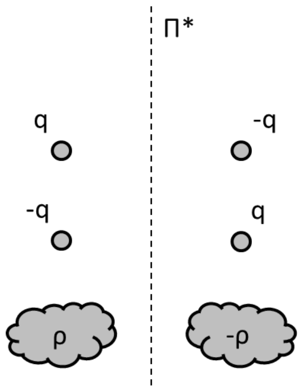
Si M appartient au plan de symétrie Π, alors le champ électrostatique est inclus dans le plan de symétrie Π.



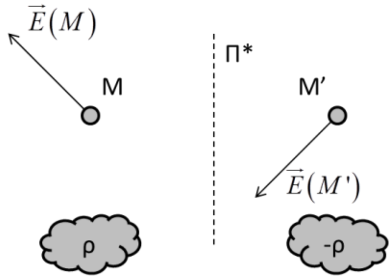


3.2.2 Plan d'anti-symétrie

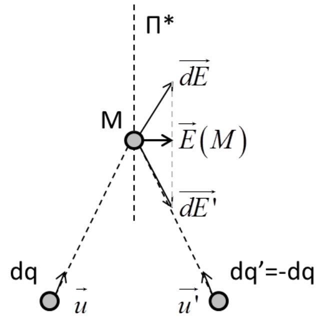
Une distribution de charge possède un plan d'anti-symétrie Π^* si Π^* est un plan de symétrique géométrique de la distribution et que les charges sont opposées de chaque côté du plan Π^*.

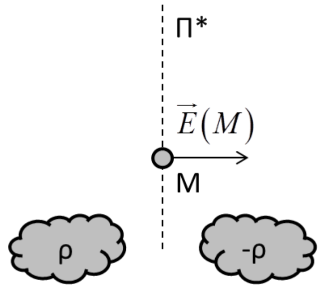


Si le plan Π^* est un plan de symétrique de la distribution de charge, alors en deux points M et M' symétrique par rapport au même plan Π^*, les champs électrostatiques seront anti-symétriques par rapport à Π^*.



Si M appartient au plan d'anti-symétrie Π^*, alors le champ électrostatique est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie Π^*.





3.3 Invariances de la distribution de charges

3.3.1 Invariance par translation

Une distribution de charges est invariante par translation suivant un axe, si pour tout point P et son translaté P' sa densité de charge vérifie : $\rho(P)=\rho(P')$.

Alors le champ électrostatique sera indépendant de la coordonnée de P selon l'axe de translation.

3.3.2 Invariance par rotation

Une distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, si la densité de charge est la même en tout point P' obtenu par rotation de P autour de l'axe.
Alors le champ électrostatique sera indépendant de la coordonnée angulaire de P par rapport à l'axe de rotation.

4 Potentiel électrostatique

4.1 Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur

La force de Coulomb est une force centrale, elle est donc conservative et dérive d'une énergie potentielle.

Propriété :
L'énergie potentielle de la force de Coulomb, dans le cas d'une charge ponctuelle Q placée à l'origine du repère, agissant sur une particule de charge q en M, s'écrit :

$$E_p(M)=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}+cte \qquad (10)$$

4.2 Circulation du champ électrostatique

Définition :
On appelle circulation du champ électrostatique entre les points A et B, l'intégrale :

$$C=\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (11)$$

Propriété :
On retrouve la différence de potentiel entre deux points A et B en calculant la circulation du champ électrostatique entre ces mêmes points.

$$V(A)-V(B)=\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (12)$$

Propriété :
Le champ électrostatique est dit à circulation conservative : $\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl}=0$

4.3 Potentiel créé par une distribution de charges

Soit une charge ponctuelle Q située au point O, origine du repère. Si on place une charge q en un point M quelconque de l'espace. Le potentiel électrostatique créé par Q en M est :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 OM} \tag{13}$$

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, où l'on note Q_i la valeur de la charge portée par la particule A_i on procède par superposition en ajoutant le potentiel électrostatique créé, au point M, par chacune des charges :

$$V(M) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 A_i M} \tag{14}$$

Dans le cas d'une distribution volumique de charge de densité volumique ρ située au point P, le potentiel électrostatique élémentaire au point M est donné par :

$$dV(M) = \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} d\tau \tag{15}$$

Dans le cas d'une distribution surfacique de charge de densité surfacique σ située au point P, le potentiel électrostatique élémentaire au point M est donné par :

$$dV(M) = \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} dS \tag{16}$$

Dans le cas d'une distribution linéique de charge de densité linéique λ située au point P, le potentiel électrostatique élémentaire au point M est donné par :

$$dV(M) = \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} dl \tag{17}$$

4.4 Relation entre champ et potentiel électrostatique

Propriété :
On peut retrouver le champ électrostatique à partir du potentiel électrostatique par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \tag{18}$$

On retiendra l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{u}_z \tag{19}$$

Propriété :
Le potentiel électrostatique possède les mêmes propriétés d'invariance que le champ électrostatique et donc que la distribution de charges.

5 Théorème de Gauss

5.1 Flux du champ électrostatique

Définition :
Le flux du champ électrostatique à travers une surface S est égal à l'intégrale du champ électrostatique à travers cette surface :

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{20}$$

Propriété :
Lorsqu'une surface Σ est fermée, le flux du champ à travers Σ est noté : $\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$

5.2 Théorème de Gauss

Théorème de Gauss :
Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée Σ est égal au rapport de la charge intérieure à la permittivité du vide :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{21}$$

Remarques :
On appelle **surface de Gauss** la surface fermée choisie pour appliquer le théorème de Gauss.
La charge intérieure Q_{int} comprend toutes les charges se trouvant dans la surface de Gauss.
Le théorème de Gauss s'utilisera quand la distribution de charge présente un haut degré de symétrie.

5.3 Théorème de Gauss pour la gravitation

Théorème de Gauss pour la gravitation:
Le flux du champ de gravité sortant d'une surface fermée Σ est égal au rapport de la masse intérieure par la constante $-4\pi G$:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{\text{int}} \tag{22}$$

On peut répertorier les analogies entre champ électrostatique et champ de gravitation dans le tableau suivant :

Champ électrique	**Champ de gravitation**
Force de Coulomb : $\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}}$	Force gravitationnelle : $\overrightarrow{F_{1/2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}}$
Charge : q	Masse : m
Constante : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	Constante : $-G$
Champ électrique : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	Champ de gravitation : $\vec{G}(M) = -G\frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{\text{int}}$

6 Distributions à haut degré de symétrie

6.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution (en utilisant le théorème de Gauss) :

1- Rechercher les symétries et invariances.
2- Choisir la surface fermée de Gauss
3- Calcul du champ électrostatique

6.2 Sphère uniformément chargée en volume

On considère une sphère de centre O et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ_0. On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.
On se place dans une base sphérique.

6.2.1 Symétries et invariances

Symétries :

Les plans passant par le centre de la sphère et par le point $M(r,\varphi,\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_r}$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par rotation selon φ et θ , d'où : $\vec{E} = E(r,\varphi,\theta)\overrightarrow{u_r} = E(r)\overrightarrow{u_r}$

6.2.2 Surface de Gauss

On choisit une sphère de centre O et de rayon r, pour respecter les symétries du problème et passer par le point M .

On remarque en effet que :

- le champ électrique étant radial, il sera normal à la sphère en tout point
- le champ ne dépendant que de r , sa valeur sera uniforme sur toute la sphère

6.2.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_\Sigma E(r)\overrightarrow{u_r}\cdot dS\overrightarrow{u_r} = \oiint_\Sigma E(r)dS = E(r)\oiint_\Sigma dS = E(r)4\pi r^2$

Calcul de la charge intérieure : $\begin{cases} r \le R & Q_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_0 \\ r > R & Q_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_0 \end{cases}$

On en déduit pour le champ électrostatique : $\begin{cases} r \le R & \vec{E} = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\overrightarrow{u_r} \\ r > R & \vec{E} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$

Remarque :

Dans le cas $r > R$, le champ électrostatique peut aussi s'écrire : $\vec{E} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$

On retrouve l'expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle placée à l'origine de charge de valeur $q = Q_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_0$.

Le champ électrostatique créé à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.

6.3 Cylindre « infini » uniformément chargé en volume

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ_0. On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace. On se place dans une base cylindrique.

6.3.1 Symétries et invariances

Symétries :

Le plan contenant l'axe du cylindre et le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre passants par le point M sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_r}$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par translation le long de l'axe du cylindre et par rotation autour du même axe, d'où : $\vec{E} = E(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} = E(r)\overrightarrow{u_r}$

6.3.2 Surface de Gauss

On choisit un cylindre fermé d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h, pour respecter les symétries du problème et passer par le point M.
On remarque en effet que :
- le champ électrique étant radial, il sera normal à la surface latérale du cylindre fermé en tout point et perpendiculaire à la normale des surfaces transversales du cylindre
- le champ ne dépendant que de r, sa valeur sera uniforme sur la surface latérale du cylindre fermé

6.3.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{latérale} E(r)\overrightarrow{u_r} \cdot dS\overrightarrow{u_r} + \iint_{transversales} E(r)\overrightarrow{u_r} \cdot dS\overrightarrow{u_z} = \iint_{latérale} E(r)dS = E(r)\iint_{latérale} dS = E(r)2\pi rh$$

Calcul de la charge intérieure : $\begin{cases} r \le R & Q_{\text{int}} = \pi r^2 h\rho_0 \\ r > R & Q_{\text{int}} = \pi R^2 h\rho_0 \end{cases}$

On en déduit pour le champ électrostatique : $\begin{cases} r \le R & \vec{E} = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r\overrightarrow{u_r} \\ r > R & \vec{E} = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$

6.4 Plan « infini » uniformément chargé en surface

On considère un plan infini assimilé à xOy contenant une densité surfacique de charge uniforme σ_0.
On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.
On se place dans une base cylindrique.

6.4.1 Symétries et invariances

Symétries :
Les plans contenant l'axe Mz sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\overrightarrow{u_z}$
Invariances :
La distribution de charge est invariante par translation selon $\overrightarrow{u_r}$ par rotation autour de Oz, d'où :
$\vec{E} = E(\mathrm{r},\theta,z)\overrightarrow{u_z} = E(z)\overrightarrow{u_z}$
Parité :
De plus, le plan contenant la distribution de charge (xOy) est un plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrostatique sera donc symétrique par rapport à ce plan. Donc pour $M(z)$ et $M'(-z)$, le champ électrostatique sera: $E(-z) = -E(z)$ La fonction est impaire.

6.4.2 Surface de Gauss

On choisit un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h fermé par des disques aux côtes z et $-z$ ($h = 2z$), pour respecter les symétries du problème et passer par le point M.
On remarque en effet que :

- le champ électrique étant selon Oz, il sera normal aux disques et perpendiculaire à la normale des surfaces transversales du cylindre
- le champ ne dépendant que de z, sa valeur sera uniforme sur le disque se trouvant en z

6.4.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux :

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{latérale} E(z)\vec{u_z}\cdot dS\vec{u_r} + \iint_{disque(z)} E(z)\vec{u_z}\cdot dS\vec{u_z} + \iint_{disque(-z)} E(-z)\vec{u_z}\cdot dS\left(-\vec{u_z}\right)$$

$$= \iint_{disque(z)} E(z)\cdot dS + \iint_{disque(-z)} E(z)\cdot dS = 2E(z)\iint_{disque(z)} dS = 2E(z)\pi R^2 \quad pour\ z>0$$

Calcul de la charge intérieure : $Q_{\mathrm{int}} = \pi R^2\sigma_0$

On en déduit pour le champ électrostatique : $\vec{E} = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \quad pour\ z>0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \quad pour\ z<0$

Remarque :

L'étude précédente fait apparaît une discontinuité en $z=0$ telle que : $\vec{E}\left(z=0^+\right)-\vec{E}\left(z=0^-\right)=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$

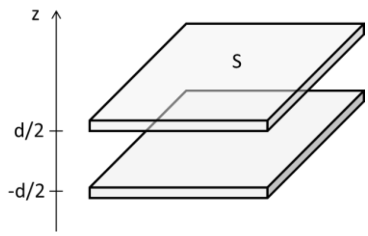
Cette discontinuité se retrouvera à chaque fois que l'on aura une distribution surfacique de charges.

7 Étude du condensateur plan

7.1 Description

Un condensateur plan est constitué de deux armatures conductrices qui se font face. Ici, on supposera que ce sont des carrés d'axe Oz et d'aire S séparés par une distance d, appelée écartement. L'écartement est très faible devant les dimensions latérales, ce qui revient à supposer deux plans infinis chargés en surface. L'armature en $z=\dfrac{d}{2}$ est chargée positivement de densité de charge surfacique σ et l'armature en $z=-\dfrac{d}{2}$ est chargée négativement de densité de charge surfacique $-\sigma$.

Lorsque ce composant est branché sur un générateur, qui impose une différence de potentiel U entre les deux armatures, un champ électrique apparait dans l'espace inter-armatures.



7.2 Champ électrique entre les armatures

7.2.1 Etude de l'armature supérieure

Mêmes symétries et invariances que celles du plan infini chargé surfaciquement, soit : $\vec{E}=E(z)\vec{u_z}$

Le champ électrostatique est symétrique par rapport à l'armature. Donc : $E\left(-z+\dfrac{d}{2}\right)=-E\left(z+\dfrac{d}{2}\right)$

L'armature supérieure crée le champ : $\begin{cases} \vec{E_1}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \quad pour\ z>\dfrac{d}{2} \\ \vec{E_1}=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} \quad pour\ z<\dfrac{d}{2} \end{cases}$

7.2.2 Etude de l'armature inférieure

Le champ électrostatique est symétrique par rapport à l'armature. Donc : $E\left(-z-\frac{d}{2}\right)=-E\left(z-\frac{d}{2}\right)$

L'armature inférieure crée le champ : $\begin{cases} \overrightarrow{E_2}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour\ z>-\frac{d}{2} \\ \overrightarrow{E_2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour\ z<-\frac{d}{2} \end{cases}$

7.2.3 Champ électrostatique entre les armatures

On utilise le principe de superposition pour trouver le champ électrique total entre les deux armatures :

Soit finalement : $\begin{cases} \vec{E}=\vec{0} \quad pour\ z>\frac{d}{2} \\ \vec{E}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \quad pour\ -\frac{d}{2}<z<\frac{d}{2} \\ \vec{E}=\vec{0} \quad pour\ z<-\frac{d}{2} \end{cases}$

7.3 Capacité du condensateur

On peut retrouver la différence de potentiel entre les deux armatures en calculant la circulation du champ électrostatique : $U=V\left(\frac{d}{2}\right)-V\left(-\frac{d}{2}\right)=\int_{\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=\int_{\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}}-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}\cdot dz\overrightarrow{u_z}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}}dz=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}=Ed$

Or, la capacité d'un condensateur est définie par : $C=\frac{Q}{U}$

avec Q : charge portée par l'armature surpérieure telle que $Q=\sigma S$

<u>Propriété</u> :

Dans un condensateur plan, la capacité est égale à : $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

7.4 Aspect énergétique

Un condensateur emmagasine une énergie électrique égale à : $U_E=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2$

Si on remplace par les expressions précédentes : $U_E=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 SdE^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 VE^2$

On en déduit que dans le cas d'un condensateur plan, la densité volumique d'énergie est donnée par : $u_E=\frac{dU_E}{dV}=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$

8 Topographie du champ électrostatique

8.1 Définitions

Définitions :
Le champ électrique est tangent à des courbes appelées **lignes de champ** qui sont orientées dans le sens du champ.
Un **tube de champ** est formé par un ensemble de lignes de champ qui s'appuyant sur un contour fermé.
Une **surface équipotentielle** est une surface formée d'un ensemble de points au même potentiel.

8.2 Propriétés

- le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.
- le champ électrique est perpendiculaire en tout point à une surface équipotentielle
- Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée sur elle-même.
- en un point M où le potentiel a un maximum relatif, se trouve une charge positive et inversement pour un minimum relatif et une charge négative.
- Si les lignes de champ se resserrent alors $S_2 < S_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 < E_2$ et le champ électrique est alors plus intense.

L'intersection de lignes de champ correspond à deux cas singuliers :
- point où se trouve une charge ponctuelle, puisque le potentiel y est extrémal
- point où le champ est nul, seul vecteur à pouvoir avoir plusieurs directions