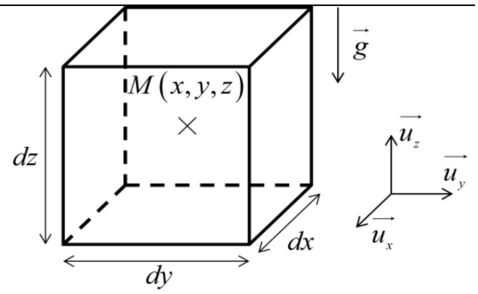
Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen

Hypothèses : régime stationnaire, référentiel galiléen, base cartésienne
Système fermé : particule de fluide centrée sur le point $M(x,y,z)$ de volume $dV = dxdydz$, de masse $dm = \mu(M)dV$ soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$
Sujet : étude du champ de pression $P(M)$



1 Forces au sein d'un fluide au repos

Forces volumiques : actions à distance de longue portée

> La force $\overrightarrow{dF_V}$ élémentaire exercée sur l'élément de volume dV s'exprime en fonction de la densité volumique de force $\overrightarrow{f_V}$ (N.m[-3]) par : $\overrightarrow{dF_V} = \overrightarrow{f_V}(M)dV$

Forces de pesanteur :
$\overrightarrow{dF_V} = -\mu(M)gdV\overrightarrow{u_z}$

Forces surfaciques : actions à plus courte portée

> La force $\overrightarrow{dF_S}$ élémentaire exercée sur l'élément de surface dS s'exprime en fonction de la densité surfacique de force $\overrightarrow{f_S}$ (N.m[-2]) par : $\overrightarrow{dF_S} = \overrightarrow{f_S}(M')dS$

Forces de pression :

$$\overrightarrow{dF_S} = \begin{array}{l} \left(P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)-P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\right)dydz\overrightarrow{u_x} \\ \left(P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)-P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)\right)dxdz\overrightarrow{u_y} \\ \left(P\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right)-P\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)\right)dxdy\overrightarrow{u_z} \end{array}$$

2 Relation de statique des fluides

Principe fondamental de la dynamique : $\overrightarrow{dF_V} + \overrightarrow{dF_S} = \vec{0}$

Projection sur les axes : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{dP}{dz}(z) = -\mu(z)g \end{cases}$ => la pression est indépendante des coordonnées x et y

> Si le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, alors un fluide au repos dans un référentiel galiléen possède une pression P ne dépendant que de la coordonnée cartésienne z par la loi, appelée **relation de statique des fluides** :
>
> $$\frac{dP}{dz} = -\mu g \quad (1)$$

Remarques : Si l'axe (Oz) est descendant, la relation devient : $\frac{dP}{dz} = \mu g$

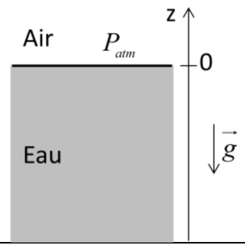
3 Exemples

Cas d'un fluide incompressible et homogène :

<u>Hypothèses</u> : Pression à la surface de l'eau P_{atm} et axe (Oz) orienté vers le haut

Dans un fluide incompressible et homogène, la pression augmente avec la profondeur selon la relation :

$$P(z) = P_{atm} - \mu g z$$



Cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait :

<u>Hypothèses</u> : Fluide compressible, atmosphère à la température uniforme T_0, pression à altitude nulle P_{atm} et axe (Oz) orienté vers le haut

La masse volumique dépendant de la pression, avec la relation des gaz parfaits : $\mu = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT_0}$

Relation de statique des fluides : $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}dz$ intégrée entre l'altitude nulle du sol et l'altitude z :

$$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$$

Dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait, la pression diminue avec l'altitude selon la relation :

$$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad avec \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

Comparaison des deux modèles :

Lorsque la variation d'altitude est très faible :

$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right) \simeq P_{atm} - \frac{P_{atm}M}{RT_0}gz \simeq P_{atm} - \mu(z=0)gz$ => Cohérence entre les deux modèles