# Superposition d'ondes lumineuses

## 1 Superposition de deux ondes lumineuses

### 1.1 Superposition de deux ondes monochromatiques

On s'intéresse à deux sources ponctuelles (lumineuses en optique) notées $S_1$ et $S_2$ qui émettent des ondes planes monochromatiques de pulsations respectives $\omega_1$ et $\omega_2$.

Les deux signaux sont d'amplitudes respectives : $\begin{cases} s_1(S_1,t) = s_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ s_2(S_2,t) = s_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{cases}$

Les deux signaux émis par les deux sources se propagent et atteignent le point M :

$$\begin{cases} s_1(M,t) = s_{1m}\cos\left(\omega_1 t - \dfrac{2\pi}{\lambda_1}(S_1M) + \varphi_{01}\right) = s_{1m}\cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \\ s_2(M,t) = s_{2m}\cos\left(\omega_2 t - \dfrac{2\pi}{\lambda_2}(S_2M) + \varphi_{02}\right) = s_{2m}\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \end{cases}$$

La lumière étant une onde électromagnétique, on peut utiliser le théorème de superposition, l'onde résultante en M est donc : $s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$

### 1.2 Formule de Fresnel

On s'intéresse dans le cas d'ondes lumineuses à l'intensité lumineuse résultante en M (K = 1) :

$$\begin{aligned} I(M) &= \left\langle s^2(M,t)\right\rangle = \left\langle \left(s_1(M,t)+s_2(M,t)\right)^2\right\rangle = \left\langle s_1^2(M,t)+s_2^2(M,t)+2s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle \\ &= \left\langle s_1^2(M,t)\right\rangle + \left\langle s_2^2(M,t)\right\rangle + 2\left\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle = I_1(M)+I_2(M)+2\left\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle \end{aligned}$$

On remarque donc que l'intensité lumineuse résultante est la somme des intensités lumineuses dues à chacune des sources si elles étaient allumées séparément et d'un troisième terme qui traduit le phénomène d'interférences.

On peut mettre ce troisième terme sous la forme suivante où :

$$\begin{aligned} \left\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\right\rangle &= \left\langle s_{1m}\cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))s_{2m}\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))\right\rangle \\ &= \underbrace{\left\langle \frac{s_{1m}s_{2m}}{2}\cos\left((\omega_1+\omega_2)t - (\varphi_1(M)+\varphi_2(M))\right)\right\rangle}_{=0} + \left\langle \frac{s_{1m}s_{2m}}{2}\cos\left((\omega_1-\omega_2)t + \varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right)\right\rangle \\ &= \frac{s_{1m}s_{2m}}{2}\left\langle \cos\left((\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right)\right\rangle \\ &= \sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle \cos\left((\omega_1-\omega_2)t+\varphi_2(M)-\varphi_1(M)\right)\right\rangle \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse résultante se met alors sous la forme :

$$I(M) = I_1(M)+I_2(M)+2\sqrt{I_1(M)I_2(M)}\left\langle \cos\left((\omega_1-\omega_2)t+\varphi(M)\right)\right\rangle$$

$$avec \quad \varphi(M) = \varphi_2(M)-\varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_2}(S_2M) - \frac{2\pi}{\lambda_1}(S_1M) - \varphi_{02}+\varphi_{01}$$

### 1.3 Ondes incohérentes

Lorsque les ondes n'interfèrent pas entre elles, elles sont dites **incohérentes**. L'éclairement est la somme des éclairements de chacune des deux sources. Le terme d'interférences est nul.

$$I(M) = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

### 1.4 Cohérence des sources

Définition :
Deux sources sont dites **cohérentes**, lorsque l'intensité lumineuse résultante n'est pas la somme de leurs deux intensités, $I_1$ et $I_2$, il y a en plus un terme d'interférence.

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi(M)) \qquad (2)$$

Propriété :
Deux sources cohérentes sont nécessairement **synchrones** : elles ont même pulsation.

Propriété :
Deux sources cohérentes doivent avoir un déphasage constant dans le temps.

## 2 Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles

### 2.1 Description du champ d'interférences

L'intensité lumineuse en M peut prendre toutes les valeurs entre : $\begin{cases} I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \\ I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \end{cases}$

L'intensité lumineuse est maximum si les deux ondes sont en phase : $\varphi(M) = 0[2\pi]$

On parle **d'interférences constructives** et de **franges brillantes**, ou claires, ou lumineuses.

L'intensité lumineuse est minimum si les deux ondes sont en opposition de phase : $\varphi(M) = \pi[2\pi]$

On parle **d'interférences destructives** et de **franges sombres**, ou foncées.

Définition :
On appelle **différence de marche** au point M, $\delta(M)$, la longueur :

$$\delta(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi}\varphi(M) = \delta_{géo}(M) + \delta_{sup} = (S_2M) - (S_1M) + \delta_{sup} \qquad (3)$$

Définition :
On appelle **ordre d'interférence** en M, $p(M)$, le rapport :

$$p(M) = \frac{\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \qquad (4)$$

Propriété :
Dans le cas de franges brillantes, on a :

$$\varphi(M) = 0[2\pi] \iff \delta(M) = 0[\lambda_0] \iff p(M)\ \textit{est un entier}$$

Dans le cas de franges sombres, on a :

$$\varphi(M) = \pi[2\pi] \iff \delta(M) = \frac{\lambda_0}{2}[\lambda_0] \iff p(M)\ \textit{est un demi-entier}$$

## 2.2 Contraste d'une figure d'interférence

On peut réécrire l'intensité lumineuse totale au point M sous la forme :

$$I(M) = (I_1 + I_2)\big(1 + C\cos(\varphi(M))\big)$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cas particulier où les deux ondes ont la même intensité lumineuse $I_0$, l'expression du contraste est maximal : $C = 1$

## 2.3 Allure des franges d'interférences

On étudie les interférences produites à partir d'une source primaire ponctuelle, donnant naissance par un système optique approprié (interféromètre) à deux sources secondaires $S_1$ et $S_2$ mutuellement cohérentes. Pour des ondes de même pulsation, $\omega$, de même amplitude, $s_0$, l'intensité lumineuse du champ d'interférence se met sous la forme :

$$I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)\right)$$

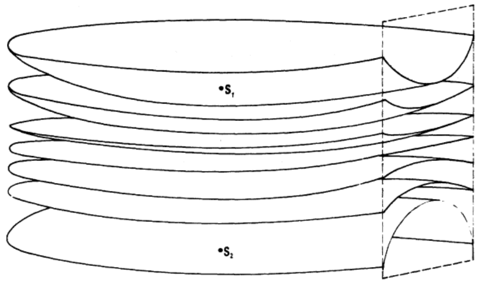
Les franges d'interférences sont le lieu des points M telles que $\delta(M) = constante$, soit avec nos hypothèses : $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = cte \;\Leftrightarrow\; n(S_2M - S_1M) = cte$

Il s'agit d'hyperboloïdes de révolution de foyers $S_1$ et $S_2$.

Deux cas particuliers :

- l'intersection avec un plan perpendiculaire à l'axe des sources secondaires $(S_1S_2)$ : les franges brillantes sont alors des cercles
- l'intersection avec un plan parallèle à $(S_1S_2)$ : les franges brillantes sont alors des hyperboles.

Dans les conditions habituelles des expériences d'optique (distances $S_1S_2$ petite devant la distance d'observation), ces hyperboles peuvent être assimilées à des droites.



# 3 Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde

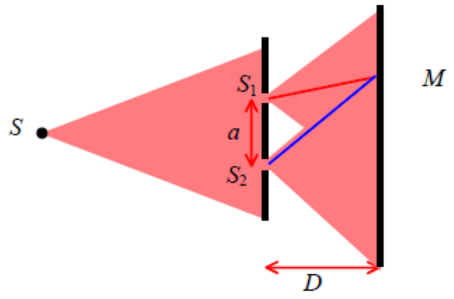
Dans le cas d'un dispositif à division du front d'onde, les deux ondes qui interfèrent sont issues d'une division géométrique de l'onde incidente issue de la source. Exemple : les fentes d'Young.

## 3.1 Etude théorique des trous d'Young

### 3.1.1 Description du dispositif

Deux trous $S_1$ et $S_2$ identiques et de très petite dimension (rayon de l'ordre du dixième de millimètre, ou moins), sont percés dans un écran opaque et distants de $a$ (de l'ordre de quelques millimètres).

La lumière incidente est diffractée par chacun d'eux et les ondes réémises se superposent dans toute une partie de l'espace.
Eclairés par une source ponctuelle $S$ monochromatique de longueur d'onde $\lambda$, ils se comportent donc comme deux sources secondaires cohérentes.
La source $S$ est placée à la même distance de chacun d'entre eux. L'observation se fait sur un écran parallèle à $S_1S_2$ placé à une distance $D$.




Définition :
On parle dans ce cas **d'interférences non localisées**, car elles existent dans tout le domaine de l'espace où les ondes issues de $S_1$ et $S_2$ se superposent

### 3.1.2 Description du champ d'interférences

#### *3.1.2.1 Source à distance finie et observation à grande distance finie*

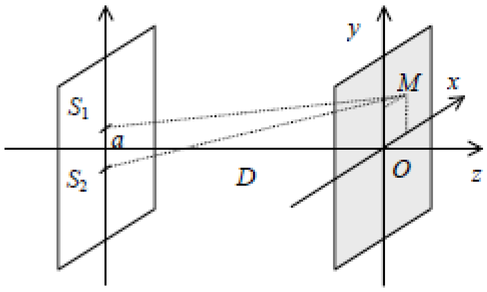
Soit $a$ la distance séparant les deux fentes, $D$ la distance à l'écran et $\lambda$ la longueur d'onde de la source ponctuelle. On pose : $D \gg a, |x|, |y| \gg \lambda$

La différence de marche se met sous la forme :

$$\delta(M) = n(S_2M - S_1M) \approx nD\frac{ay}{D^2} \approx n\frac{ay}{D}$$

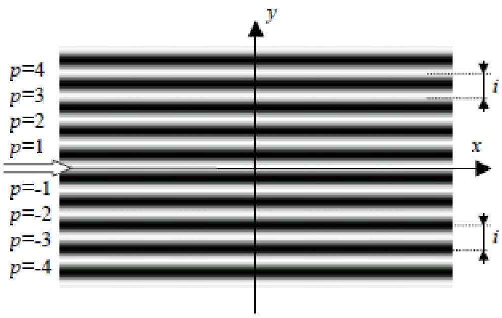
La répartition de l'intensité lumineuse sur l'écran peut alors se mettre sous la forme :

$$I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi ay}{\lambda D}\right)\right)$$



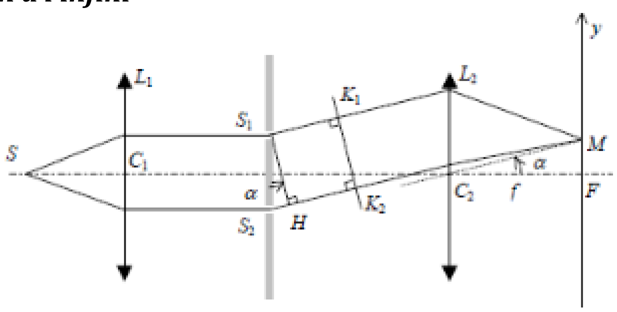

L'éclairement ne dépend que de la seule coordonnée y : les franges d'interférences sont donc des segments de droites parallèles à l'axe des x donc perpendiculaires à $S_1S_2$.
On remarque que la répartition d'intensité lumineuse sur le plan d'observation est périodique. La période de la fonction est appelée l'interfrange et notée $i$ :

$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad \Rightarrow \quad I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi y}{i}\right)\right)$$




#### *3.1.2.2 Source à distance finie et observation à l'infini*

On ajoute une première lentille convergente $L_1$ au dispositif telle que la source $S$ se trouve en son foyer objet. Alors les trous sont éclairés en lumière parallèle et les rayons émergeant des trous sont aussi parallèles. On parle d'observation à l'infini. Pour pouvoir se ramener à une distance finie, on place une seconde lentille convergente $L_2$ telle que l'écran se trouve en son plan focal image.



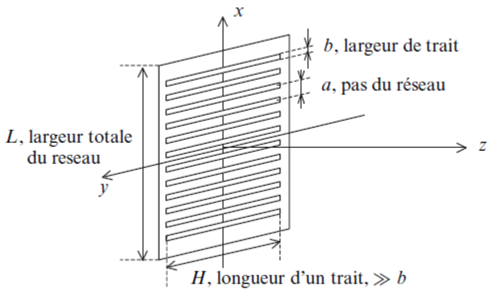
# 4 Superposition de $N$ ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles

## 4.1 Réseau de diffraction

### 4.1.1 Définition

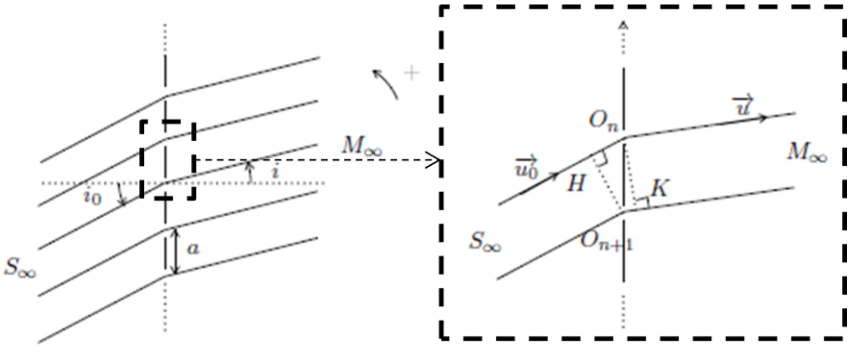
Un **réseau** est constitué par la répétition périodique d'un motif diffractant, comme par exemple une fente. La période spatiale est appelée **pas du réseau**.

Le réseau par transmission le plus simple est un plan opaque percé de $N$ fentes fines et longues, appelées **traits du réseau**, parallèles entre elles et équidistantes de $a$, le pas du réseau.
Le pas du réseau est souvent donné en nombre de traits par millimètre : $n = 1/a$.




## 4.2 Formule des réseaux par transmission

On suppose le réseau éclairé par une source monochromatique, de longueur d'onde $\lambda$. Les rayons éclairent le réseau sont issus d'une même source et sont donc cohérents entre eux. Ainsi, l'amplitude diffractée par le réseau à l'infini résulte des interférences entre les rayons issus de tous les motifs éclairés : on parle **d'interférences à N ondes**.




Pour que la lumière diffractée dans une direction $i$ soit observable, il faut que les interférences entre les ondes issues de deux motifs successifs soient constructives.

On obtient donc la **formule des réseaux**, qui nous donne la valeur de l'angle d'émergence, $i_p$, du réseau pour une frange brillante en fonction de l'angle d'incidence, $i_0$, et de l'ordre d'interférence $p$ entier :

$$a\left(\sin i_p - \sin i_0\right) = p\lambda_0 \quad p \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

## 4.3 Dispersion d'un réseau

Le réseau est dispersif. On va ainsi parler de "la raie d'ordre $p$" afin de distinguer les différentes raies observées correspondant aux différentes valeurs de $p$. Ce sont les plus grands longueurs d'onde qui sont le plus déviées.