Equations de Maxwell

1 Principe de conservation de la charge

Principe de conservation de la charge électrique :
La charge électrique est une **grandeur conservative**. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

2 Equations de Maxwell dans le vide

2.1 Formes locales

Le **champ électromagnétique** est caractérisé par un couple de vecteurs noté $\{\vec{E},\vec{B}\}$ où $\vec{E}$ est le vecteur **champ électrique** (V.m^{-1}) et $\vec{B}$ est le vecteur **champ magnétique** (T).
Ce champ électromagnétique créé au point M à l'instant t t par la distribution $\{\rho,\vec{j}\}$ est régi par les quatre **équations de Maxwell dans le vide** :

- **Equation de Maxwell-Gauss** (MG):

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

- **Equation de Maxwell-Ampère** (MA):

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

- **Equation de Maxwell-Thomson** (ou flux) (MT):

$$div\vec{B} = 0 \tag{4}$$

- **Equation de Maxwell-Faraday** (MF):

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5}$$

2.2 Formes intégrales et interprétation

2.2.1 Equation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss exprime la **validité générale du théorème de Gauss** :

$$\underbrace{\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\left(\vec{E}\right)d\tau}_{Green-Ostrogadsky} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau \quad \Leftrightarrow \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.2.2 Equation de Maxwell-Ampère

En régime permanent, on a introduit le théorème d'Ampère, dont la formulation locale est :

$$\underbrace{\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\cdot\overrightarrow{dS}}_{Stokes} = \mu_0 I_{\text{int}} = \iint_S \mu_0\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0\vec{j}$$

On introduit donc un courant fictif nommé densité de courant de déplacement $\overrightarrow{j_D}$ tel que :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0\left(\vec{j}+\overrightarrow{j_D}\right) \quad avec \quad \overrightarrow{j_D}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Sa signification physique est la suivante : un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.
L'équation de Maxwell-Ampère exprime la **forme généralisée du théorème d'Ampère** :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad\Leftrightarrow\quad \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl}=\mu_0\iint_S\left(\vec{j}+\overrightarrow{j_D}\right).\overrightarrow{dS} \quad avec \quad \overrightarrow{j_D}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

2.2.3 Equation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson exprime le **caractère conservatif du flux magnétique** en régime variable :
$$\underbrace{\oiint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V div\left(\vec{B}\right)d\tau}_{Green-Ostrogadsky}=0 \quad\Leftrightarrow\quad div\vec{B}=0$$

2.2.4 Equation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday exprime qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservative. Cette équation rend compte du **phénomène d'induction électromagnétique** :

$$e=\oint_C\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=\iint_S\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\cdot\overrightarrow{dS}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_S\vec{B}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint_S\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{dS} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

2.3 Equations de Maxwell dans une région vide de charges et de courants

Dans le vide, en absence de charges et courants, on peut simplifier les équations de Maxwell tel que :

$$\begin{array}{ll}(MG) \quad div\vec{E}=0 & (MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ (MT) \quad div\vec{B}=0 & (MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{array} \tag{6}$$

3 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

3.1 Conditions de validité

Définition :
On appelle **approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) l'étude de l'électromagnétisme dans le cas où les temps de propagation sont négligeables devant la période des signaux.
Si l'on note τ le temps de propagation du signal et T la période, alors l'ARQS est applicable si $\tau \ll T$.

3.2 Equations de Maxwell dans un conducteur, dans le cadre de l'ARQS

Dans les conducteurs, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\left\|\overrightarrow{j_D}\right\| \ll \left\|\vec{j}\right\| \tag{7}$$

Dans un **conducteur** et dans le cadre de **l'ARQS**, l'équation de Maxwell Ampère s'écrit :

$$(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j} \tag{8}$$

3.3 Cas particulier des régimes stationnaires (ou permanents)

$$
\begin{aligned}
&(MG) \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\
&(MT) \quad div\vec{B} = 0 \\
&(MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}
\end{aligned} \tag{9}
$$

3.4 Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique

Equation de Poisson :

L'équation locale reliant potentiel et densité volumique de charge, appelée équation de poisson, s'écrit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \tag{10}$$

Equation de Laplace :

Dans une région sans charges, l'équation de Poisson se simplifie en :

$$\Delta V = 0 \tag{11}$$

5 Opérateurs différentiels

5.1 Le gradient

5.1.1 Définition

Définition :
Le gradient permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ scalaire.
En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\overrightarrow{grad}(m) = \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z} \quad (1)$$

Interprétation physique :

Le vecteur $\overrightarrow{grad}(m)$ est normal aux surfaces de niveau (m = constante). Il est dirigé vers les valeurs croissantes de m.

Remarque :

En conduction thermique : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$

En électrostatique : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

5.1.2 Champ de gradient

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{a}$ est dit champ de gradient si il existe une fonction scalaire m telle que :

$$\vec{a} = -\overrightarrow{grad}(m)$$

m est appelé potentiel scalaire du champ $\vec{a}$ et est défini à une constante additive près.

Propriété :

Pour tout contour fermé, on a : $\oint_\Gamma \vec{a}.\overrightarrow{dl} = 0$

Remarque :

En électrostatique : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow \oint_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$

5.2 La divergence

5.2.1 Définition

Définition :
La divergence permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes, elle est donnée par :

$$div(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) \quad (2)$$

Interprétation physique :

Le signe de la divergence de $\vec{a}$ calculée au point M est lié au caractère convergent ou divergent des lignes de champs à partir de ce point.

Remarque :

En mécanique de fluide : écoulement non divergent si $div(\vec{v}) = 0$

5.2.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Théorème de Green-Ostrogradsky :
Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur $\vec{a}$. Si les dérivées partielles de $\vec{a}$ sont bornées dans V alors : $\oiint_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(div\vec{a}\right)dV$

Interprétation physique :
La divergence représente le flux sortant d'une surface fermée localement par unité de volume.
Remarque :
En mécanique de fluide : un écoulement stationnaire et incompressible est aussi appelé non divergent, en effet : $\oiint_S \vec{v}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$ ou encore $div\left(\vec{v}\right)=0$

5.3 Le rotationnel

5.3.1 Définition

Définition :
Le rotationnel permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} \quad (3)$$

Interprétation physique :
Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.
Remarque :
En mécanique de fluide : écoulement non rotationnel si $\overrightarrow{rot}\left(\vec{v}\right)=0$

Moyen mnémotechnique :

Calcul de déterminant (coordonnées cartésiennes) : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

5.3.2 Champ de rotationnel

Définition :
Un champ de vecteur $\vec{b}$ est dit champ de rotationnel si il existe un vecteur $\vec{a}$ tel que : $\vec{b} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)$
$\vec{a}$ est appelé potentiel vecteur du champ $\vec{b}$ et est défini à un gradient près.

Propriété :
Pour toute surface fermée, on a : $\oiint_S \vec{b}.\overrightarrow{dS} = 0$

Remarque :
En magnétostatique : $\oiint_\Sigma \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$

5.3.3 Théorème de Stokes

Théorème de Stokes :
Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est

défini un champ de vecteur $\vec{a}$, alors : $\oint_C \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right) \cdot \overrightarrow{dS}$

Interprétation physique :

Le rotationnel représente la circulation le long d'un contour fermé localement par unité de surface.

5.4 Le laplacien

Définition :

Le laplacien permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ scalaire.

En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\Delta m = \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

Le laplacien permet aussi de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.

En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\vec{\Delta}\left(\vec{a}\right) = \left(\Delta a_x\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\Delta a_y\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\Delta a_z\right)\overrightarrow{e_z} \tag{5}$$

Interprétation physique :

L'équation de Laplace Δm = 0 traduit le fait que la solution m est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage. Par exemple, la hauteur d'une membrane attachée par son bord satisfait l'équation de Laplace. Ceci traduit le fait que la hauteur de la membrane en un point est toujours égale à la moyenne des hauteurs sur un petit cercle centré en ce point.

Si m ne dépend que de x, alors $\Delta m = \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad m = ax^2 + bx + c$

5.5 Identités vectorielles

$$\begin{aligned}
&div\left(\overrightarrow{grad}(m)\right) = \Delta m \\
&div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right) = 0 \\
&\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(m)\right) = \vec{0} \\
&\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{a}\right)\right) - \vec{\Delta}\left(\vec{a}\right)
\end{aligned} \tag{6}$$