Energie du champ électromagnétique

1 Densité volumique de force électromagnétique

Dans un élément de volume $d\tau$, de densité volumique de charges ρ, animée d'une vitesse $\vec{v}$, la force élémentaire exercée sur ce volume s'écrit : $\overrightarrow{dF} = \rho d\tau\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

La puissance dP reçue par la charge dans le volume $d\tau$ est donc : $dP = \overrightarrow{dF} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

<u>Définition</u> :
La densité volumique de puissance, p (W.m^{-3}), cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est donnée par :

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \qquad (1)$$

2 Bilan d'énergie électromagnétique

2.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

<u>Définition</u> :
Les champs électrique et magnétique régnant dans une portion de l'espace vide entraînent la localisation d'une énergie dont la densité volumique, u (J.m^{-3}), s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad (2)$$

<u>Remarque</u> :
Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t l'énergie électromagnétique U contenue dans ce volume est : $U = \iiint_V u d\tau$

La diminution de cette énergie se retrouve sous deux formes :

- puissance cédée à la matière, P (ou aux porteurs de charges) (partie I)
- puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement, $P_{rayonnée}$

2.2 Vecteur de Poynting

<u>Définition</u> :
La puissance rayonnée, $P_{rayonnée}$, par le champ électromagnétique à travers une surface S est égale au flux d'un vecteur appelée vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$:

$$P_{rayonnée} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (3)$$

<u>Définition</u> :
Le vecteur densité de courant d'énergie rayonnée ou **vecteur de Poynting** représente la densité surfacique de puissance rayonnée et s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad (4)$$

2.3 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique

On peut écrire la diminution de l'énergie électromagnétique sous la forme :

$$-\frac{dU}{dt} = P + P_{rayonnée}$$

<u>Principe de conservation de l'énergie électromagnétique</u> :
L'énergie électromagnétique est une grandeur conservative. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0 \qquad (5)$$

3 Bilan énergétique dans un conducteur ohmique

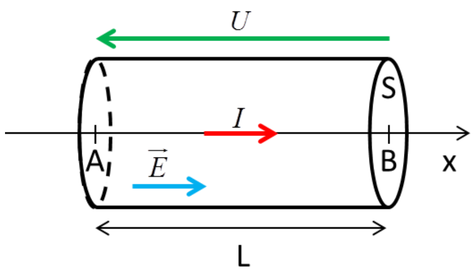
3.1 Loi d'Ohm locale

<u>Loi d'Ohm locale</u> :
Dans de nombreux cas, si le champ appliqué est suffisamment faible alors le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique sont liés par une relation empirique faisant intervenir la conductivité γ du milieu (S.m^{-1}) :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad (6)$$

3.2 Forme intégrale de la loi d'Ohm

On considère une portion de conducteur cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L, baignant dans un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E_0\vec{u_x}$. Le matériau présente une conductivité γ constante.
Le courant traversant le conducteur est alors : $I = jS = \gamma E_0 S$



La différence de potentiel entre les extrémités du cylindre se met sous la forme :

$$U = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_0 L$$

On appelle **résistance électrique** le rapport : $R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$

3.3 Densité volumique de puissance cédée par effet Joule

D'après la loi d'Ohm locale, la puissance volumique cédée aux porteurs de charge se met sous la forme : $p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma\vec{E}\cdot\vec{E} = \gamma E^2$

En intégrant sur le volume, on retrouve la puissance totale cédée par effet Joule dans le conducteur cylindrique, soit : $P = pSL = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2 SL = \frac{L}{\gamma S}I^2 = RI^2$

<u>Propriété</u> :
La puissance dissipée par effet Joule s'identifie donc à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge du conducteur. Sa densité volumique de puissance se met sous la forme :

$$p = \gamma E^2 \qquad (7)$$