

Énergétique des fluides en écoulement laminaire stationnaire dans une conduite

1 Bilan de grandeurs énergétiques extensives

1.1 Surface et volume de contrôle

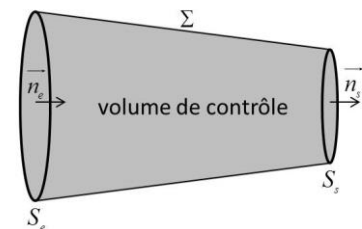
Définition :

Une **surface de contrôle** est une surface fermée, nommée Σ , fixe dans le référentiel d'étude et qui s'appuie sur deux sections d'entrée et de sortie, S_e et S_s , respectivement reliées par des lignes de courants. L'intérieur de Σ est lui appelé **volume de contrôle**.

Propriété :

Cette surface de contrôle délimite un **système** dit **ouvert**. En régime stationnaire, la masse contenue dans le volume ne varie pas et on obtient donc **l'égalité des débits** : $D_{me} = D_{ms} = D_m$

tube de courant = surface de contrôle



1.2 Bilan d'énergie

Soit Σ la surface de contrôle délimitant un système ouvert et épousant les parois d'une conduite, nous allons observer l'évolution des grandeurs énergétiques en entrée et en sortie de Σ sur l'intervalle de temps $[t, t + dt]$.

Pour effectuer ce bilan d'énergie, il nous faut définir un système fermé, n'échangeant donc pas de matière avec l'extérieur.

A l'instant t , on définit un système Σ' comprenant :

- le fluide contenu dans Σ à l'instant t
- la masse élémentaire de fluide $dm = D_m dt$ qui va pénétrer dans Σ pendant la durée dt suivante, cette portion de fluide est notée Σ_e .

Σ' est donc la réunion de Σ et Σ_e .

A l'instant $t+dt$, on définit un système Σ' comprenant :

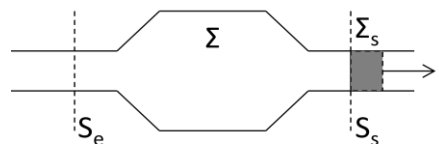
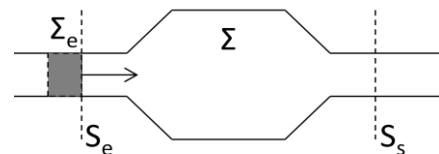
- le fluide contenu dans Σ à l'instant $t + dt$
- la masse élémentaire de fluide $dm = D_m dt$ qui va sortir de Σ pendant la durée dt , cette portion de fluide est notée Σ_s . Cette masse correspond exactement à celle entrée dans Σ en régime stationnaire.

Σ' est donc la réunion de Σ et Σ_s .

Σ' est donc bien un système fermé.

A l'instant t , l'énergie totale du système Σ' est :

$$U_{\Sigma'}(t) + E_{c,\Sigma'}(t) = U_{\Sigma}(t) + E_{c,\Sigma}(t) + U_{\Sigma_e}(t) + E_{c,\Sigma_e}(t)$$



A l'instant $t+dt$, l'énergie totale du système Σ' est :

$$U_{\Sigma'}(t+dt) + E_{c,\Sigma'}(t+dt) = U_{\Sigma}(t+dt) + E_{c,\Sigma}(t+dt) + U_{\Sigma_s}(t+dt) + E_{c,\Sigma_s}(t+dt)$$

Nous sommes en régime stationnaire, donc : $U_{\Sigma}(t+dt) + E_{c,\Sigma}(t+dt) = U_{\Sigma}(t) + E_{c,\Sigma}(t)$

La variation d'énergie totale dans Σ' pendant dt se ramène donc à :

$$\begin{aligned} dU_{\Sigma'} + dE_{c,\Sigma'} &= U_{\Sigma'}(t+dt) - U_{\Sigma'}(t) + E_{c,\Sigma'}(t+dt) - E_{c,\Sigma'}(t) \\ &= U_{\Sigma_s}(t+dt) - U_{\Sigma_e}(t) + E_{c,\Sigma_s}(t+dt) - E_{c,\Sigma_e}(t) \end{aligned}$$

Sur une ligne de courant, reliant un point de la surface d'entrée S_e à un point de la surface de sortie

S_s , on peut alors écrire : $dU_{\Sigma'} + dE_{c,\Sigma'} = dm(u_s - u_e + e_{c,s} - e_{c,e})$

en nommant u_s et u_e les énergies internes massiques du fluide et $e_{c,s}$ et $e_{c,e}$ les énergies cinétiques massiques du fluide dans Σ_s et Σ_e respectivement.

1.3 Application du premier principe

D'après le **premier principe** de la thermodynamique : $dU_{\Sigma'} + dE_{c,\Sigma'} = \delta W + \delta Q$

où δW représente le travail de toutes les forces extérieures au système Σ' , conservatives ou pas et δQ le transfert thermique de l'extérieur vers l'intérieur du système, à travers les parois avec

$\delta Q = q_e dm = \Phi dt$ où q_e est le transfert thermique massique et Φ la puissance thermique.

Remarque :

Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \sum W_{\text{forces extérieures}}$ ou $dE_c = \sum \delta W_{\text{forces extérieures}}$

Les énergies cinétiques massiques du fluide s'expriment en fonction de la vitesse de l'écoulement en

entrée v_e et en sortie v_s telles que : $e_{c,e} = \frac{1}{2}v_e^2$ et $e_{c,s} = \frac{1}{2}v_s^2$.

1.4 Travail des forces extérieures

La variation d'énergie précédemment étudiée peut être due à plusieurs causes :

1.4.1 Travail des forces de pesanteur

Ce travail dépend de la différence de hauteur entre la section d'entrée S_e et la section de sortie S_s .

On pose z_e et z_s la hauteur de chaque section. On suppose que les sections de rayons sont suffisamment faibles devant la différence de hauteur $z_s - z_e$.

Or, le poids est une force conservative, on peut donc relier son travail à **l'énergie potentielle de pesanteur** : $\delta W_{\text{pes}} = -dE_{\text{pp}}$

Sa variation dans Σ' pendant dt en régime stationnaire se ramène à : $dE_{\text{pp}} = dm(e_{\text{pp},s} - e_{\text{pp},e})$

en nommant $e_{\text{pp},s}$ et $e_{\text{pp},e}$ les énergies potentielles de pesanteur massiques du fluide dans Σ_s et Σ_e respectivement.

Ainsi : $\delta W_{\text{pes}} = -dm(e_{\text{pp},s} - e_{\text{pp},e})$

Remarque :

En supposant l'énergie potentielle de pesanteur nulle pour une hauteur nulle ($z=0$) et l'axe Oz ascendant, les énergies potentielles de pesanteur massiques du fluide s'expriment en fonction de la hauteur de l'écoulement en entrée z_e et en sortie z_s telles que : $e_{\text{pp},e} = gz_e$ et $e_{\text{pp},s} = gz_s$.

On peut aussi retrouver son travail par : $\delta W_{pes} = -\vec{P} \cdot d\vec{l} = mg\vec{u}_z \cdot d\vec{z} = mgdz$

1.4.2 Travail des forces pressantes

En amont du système Σ' , le système reçoit un travail : $\delta W_{p,e} = P_e dV_e = \frac{P_e}{\mu_e} dm$

En aval du système Σ' , le système fournit un travail : $\delta W_{p,s} = -P_s dV_s = -\frac{P_s}{\mu_s} dm$

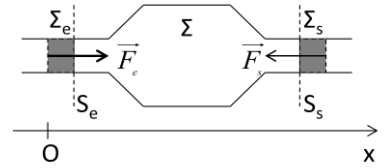
On a donc :
$$\delta W_p = \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) dm$$

Remarque :

Les forces de pression en amont et aval du système Σ' sont données par : $\vec{F}_e = P_e S_e \vec{u}_x$ et $\vec{F}_s = -P_s S_s \vec{u}_x$

Le travail élémentaire dû aux forces de pression reçu par Σ' est donc donné par :

$$\delta W_p = \vec{F} \cdot d\vec{l} = P_e S_e v_e dt - P_s S_s v_s dt = \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) dm$$



1.4.3 Travail dû à la réaction de la conduite

Ce travail δW_f est dû à l'action du fluide ou de la conduite sur le pourtour du tube de courant.

Cependant, pour un **fluide parfait** cette force est perpendiculaire à la vitesse et ne travaille donc pas : $\delta W_f = 0$

1.4.4 Travail dû à des phénomènes de dissipation

Ce travail δW_d est dû à d'éventuels processus intérieurs à l'écoulement. Dans ce cadre pourraient entrer des phénomènes de dissipation (viscosité, transferts thermiques,...). Pour un **fluide parfait**, on s'affranchira de ces aspects : $\delta W_d = 0$

1.4.5 Travail indiqué

Ce travail est dû à un élément actif δW_i , comme une pompe, que l'on appelle **travail indiqué**. Il représente la somme des travaux autres que ceux des forces de pression d'admission et de refoulement. Il est en général dû à la présence de parties mobiles dans la conduite ou la machine. Ce travail est en général renseigné sur l'élément actif sous forme d'une puissance indiquée Ψ_i avec :

$$\delta W_i = w_i dm = \Psi_i dt \quad \text{où } w_i \text{ est le travail massique indiqué.}$$

1.5 Retour sur le bilan d'énergie

En reprenant le bilan d'énergie mécanique établi précédemment, cela nous donne pour un **fluide parfait en écoulement stationnaire** :

$$dm(u_s - u_e + e_{c,s} - e_{c,e}) = \delta W_{pes} + \delta W_p + \delta W_i + \delta Q = -dm(e_{pp,s} - e_{pp,e}) + \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) dm + w_i dm + q_e dm$$

Soit, par unité de masse :
$$\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_{pp} = \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) + w_i + q_e$$

avec $\Delta u = u_s - u_e$, $\Delta e_c = e_{c,s} - e_{c,e}$ et $\Delta e_{pp} = e_{pp,s} - e_{pp,e}$

Remarque :

Le même bilan sous forme de puissance donne :

$$D_m (\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_{pp}) = D_m \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) + \Psi_i + \Phi$$

2 Relation de Bernoulli

Nous reprenons ici le bilan d'énergie précédent, sans prendre en compte les aspects thermodynamiques, on se limite donc à **l'énergie macroscopique**, alors :

$$\Delta e_c + \Delta e_{pp} = \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) + w_i$$

On se place de plus dans le cas d'un **fluide incompressible**, donc de masse volumique constante,

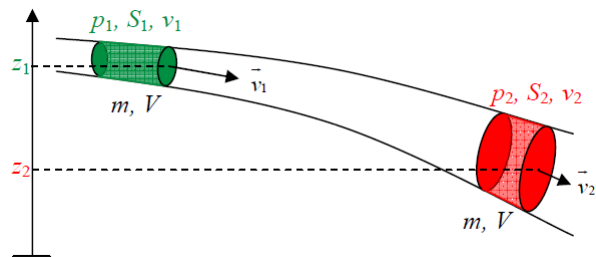
alors : $\Delta e_c + \Delta e_{pp} = \left(\frac{P_e}{\mu} - \frac{P_s}{\mu} \right) + w_i$

En remplaçant les expressions des énergies massiques cinétique et potentielles de pesanteur :

$$\left(\frac{1}{2} v_s^2 - \frac{1}{2} v_e^2 \right) + (gz_s - gz_e) = \left(\frac{P_e}{\mu} - \frac{P_s}{\mu} \right) + w_i \Rightarrow \frac{1}{2} v_s^2 + gz_s + \frac{P_s}{\mu} - \frac{1}{2} v_e^2 - gz_e - \frac{P_e}{\mu} = w_i$$

Dans le cas où tout **travail massique indiqué est nul** (pas de partie active dans la conduite), alors cette équation devient :

$$\frac{P_s}{\mu} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz_s = \frac{P_e}{\mu} + \frac{1}{2} v_e^2 + gz_e$$



Dans un référentiel galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, lorsqu'un écoulement est parfait, stationnaire, homogène et incompressible et lorsque les seules forces volumiques sont celles de pesanteur, considérées uniformes, la **relation de Bernoulli** s'écrit le long d'une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz = cte \quad (1)$$

3 Perte de charge

3.1 Définition

En présence de dissipation par des frottements dans l'écoulement, l'énergie massique en sortie de la surface de contrôle sera plus faible qu'en entrée, soit : $P_s + \frac{1}{2} \mu v_s^2 + \mu gz_s < P_e + \frac{1}{2} \mu v_e^2 + \mu gz_e$.

Définition :

On définit la **perte de charge** en Pa par la différence entre ces deux termes homogène à une pression :

$$\Delta P_C = \left(P_e + \frac{1}{2} \mu v_e^2 + \mu gz_e \right) - \left(P_s + \frac{1}{2} \mu v_s^2 + \mu gz_s \right) \quad (2)$$

Remarque :

On peut aussi l'exprimer en m alors homogène à une altitude :

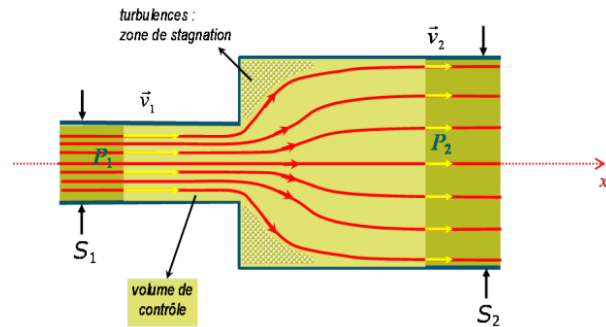
$$\Delta z_C = \left(\frac{P_e}{\mu g} + \frac{1}{2g} v_e^2 + z_e \right) - \left(\frac{P_s}{\mu g} + \frac{1}{2g} v_s^2 + z_s \right) = \frac{\Delta P_C}{\mu g}$$

3.2 Perte de charge régulière

Une perte de charge est dite **régulière** lorsqu'elle est définie pour un tronçon de conduite parcouru par un fluide incompressible, en régime stationnaire. Elle dépend de la nature du fluide, du matériau de la conduite, de la géométrie de celle-ci et des propriétés de l'écoulement.

3.3 Perte de charge singulière

Contrairement à la perte de charge régulière qui se répartit tout au long d'une conduite, les **pertes de charge singulières** apparaissent de manière localisée, sur des coudes, des raccords entre canalisation de sections différentes, des bifurcations.



4 Premier principe pour un système ouvert

4.1 Enoncé

On repart du bilan énergétique effectué en partie 1.5 :

$$\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_{pp} = \left(\frac{P_e}{\mu_e} - \frac{P_s}{\mu_s} \right) + w_i + q_e$$

Or, la fonction d'état **enthalpie** qui s'écrit sous la forme : $H = U + PV \Rightarrow h = u + \frac{P}{\mu}$ apparaît dans

l'équation précédente, on peut donc la réécrire sous la forme :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_{pp} = w_i + q_e$$

Dans un référentiel galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, lorsqu'un écoulement est stationnaire et homogène et lorsque les seules forces volumiques sont celles de pesanteur, considérées uniformes, le **premier principe pour un système ouvert** à une entrée et une sortie s'écrit :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_i + q_e \quad (3)$$

4.2 Ordres de grandeur

Exemple :

L'énergie thermique nécessaire pour vaporiser un kg d'eau sous pression usuelle ≈ 2200 kJ.

Pour atteindre une valeur comparable :

- avec l'énergie cinétique, il faut une vitesse de 2.10^3 m.s^{-1}
- avec l'énergie potentielle de pesanteur, il faut une dénivellation de 200 km

Dans la plupart des cas usuels, les énergies cinétiques et potentielles seront négligeables.

Exceptions : - usine hydroélectrique, on va utiliser l'énergie potentielle de pesanteur
- tuyère de réacteur, on va utiliser l'énergie cinétique

5 Deuxième principe pour un système ouvert

Nous allons maintenant nous intéresser au deuxième principe pour un système ouvert. Comme pour un système fermé, il nous informe sur le sens d'évolution des systèmes. En se ramenant au système fermé Σ' , on peut faire un bilan entre les instants t et $t+dt$:

A l'instant t , l'entropie du système Σ' est : $S_{\Sigma'}(t) = S_{\Sigma}(t) + S_{\Sigma_e}(t)$

A l'instant $t+dt$, l'entropie du système Σ' est : $S_{\Sigma'}(t+dt) = S_{\Sigma}(t+dt) + S_{\Sigma_s}(t+dt)$

Nous sommes en régime stationnaire, donc : $S_{\Sigma}(t+dt) = S_{\Sigma}(t)$

La **variation d'entropie** dans Σ' se ramène donc à :

$$dS_{\Sigma'} = S_{\Sigma'}(t+dt) - S_{\Sigma'}(t) = S_{\Sigma_s}(t+dt) - S_{\Sigma_e}(t) = dm(s_s - s_e)$$

en nommant s_s et s_e les entropies massiques du fluide dans Σ_s et Σ_e respectivement.

D'après le deuxième principe de la thermodynamique : $dS_{\Sigma'} = \delta S_{ech} + \delta S_{créé}$

En introduisant les entropies massiques échangées s_{ech} , qui rend compte des échanges thermiques à travers la frontière, et créées $s_{créé}$, qui rend compte des irréversibilités, on obtient le deuxième principe de la thermodynamique pour un système ouvert : $\Delta S = s_{ech} + s_{créé}$.

Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un écoulement est stationnaire et homogène, le **second principe pour un système ouvert** à une entrée et une sortie s'écrit :

$$\Delta S = s_{ech} + s_{créé} \quad (4)$$

Remarque :

On retrouve alors un deuxième principe similaire aux systèmes fermés.

Si la transformation est adiabatique, $s_{ech} = 0$ et donc $s_{créé} > 0 \Rightarrow s_s > s_e$.

Si la transformation est adiabatique réversible, $s_{créé} = 0 \Rightarrow s_s = s_e$.

6 Comment calculer une perte de charge en pratique

On cherche à déterminer la perte de charge entre deux points d'une conduite de section circulaire de diamètre D séparés d'une longueur L :

- 1) Régime d'écoulement laminaire ou turbulent en évaluant le nombre de Reynolds, $Re = \frac{\mu UD}{\eta}$
- 2) Nature de la perte de charge attendue : régulière s'il s'agit d'une perte liée aux frottements visqueux dans une conduite de section constante, singulière en cas de variation brusque de la géométrie.

6.1 Cas d'une perte de charge régulière : formule de Darcy

$\frac{\Delta P}{L} = \lambda \frac{\mu v^2}{2D}$ ou $\frac{\Delta h}{L} = \lambda \frac{v^2}{2gD}$ où λ est le coefficient de perte de charge sans dimension dont la valeur dépend du Re et éventuellement de la rugosité relative ε_r de la conduite. Cette dernière est le rapport entre la rugosité ε (dimension moyenne des aspérités sur la paroi) et le diamètre D de la conduite : $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D}$. λ est alors déterminé de façon empirique à partir de Re et ε_r .

Pour $Re < 2000$, le régime est laminaire. λ est alors constant et donnée par : $\lambda = \frac{64}{Re}$.

Pour $Re > 2000$, le régime est turbulent. λ dépend alors fortement à la fois de la valeur du Re et de la rugosité relative ε_r . Pour fixer les idées, la rugosité absolue ε peut aller de $\varepsilon \approx 10^{-2} mm$ pour une paroi lisse à $\varepsilon \approx 1 mm$ pour une paroi rugueuse.

Pour une conduite lisse en régime turbulent on peut utiliser la formule de Blasius : $\lambda = 0,316 Re^{-\frac{1}{4}}$.

Il existe d'autres formules quand la rugosité augmente. Cependant le plus simple est d'utiliser le diagramme de Moody ci-joint.

6.2 Cas d'une perte de charge singulière

Elles sont quadratiques en vitesse et données par les relations : $\Delta P = K \frac{\mu v^2}{2}$ ou $\Delta h = K \frac{v^2}{2g}$ où K

K est le coefficient de perte de charge singulière sans dimension. Il dépend essentiellement de la nature de la singularité et plus faiblement du Re . On le détermine de façon empirique au cas par cas.

Voici quelques exemples classiques :

- Coude à 90° dans une conduite de section circulaire de diamètre D : la valeur du coefficient de perte de charge singulière K dépend du rapport R/D où R est le rayon de courbure de la conduite au niveau du coude.

- Coude brusque (angle droit) : $K = 1,5$

- Elargissement brusque : $K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$ où S_2 est la section après élargissement

- Rétrécissement brusque : $K = \left(\frac{1}{c} - 1\right)^2$ avec $c = 0,63 + 0,37 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^3$ où S_2 est la section après rétrécissement.