Devoir maison 5

Dans tout le problème, la permittivité électrique de l'air est égale à celle du vide, notée ε_0 et égale à $8{,}85.10^{-12}\,F.m^{-1}$. De même, la perméabilité magnétique de l 'air est égale à celle du vide, notée μ_0 et égale à $4\pi.10^{-7}\,H.m^{-1}$.

1) Etude d'un condensateur plan

On se propose de calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ. Ce plan correspond au plan (Oxy) d'un système de coordonnées cartésiennes (Ox, Oy, Oz) classique muni d'une base orthonormée $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$. La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On se place tout d'abord dans le cas de l'électrostatique (σ = constante).

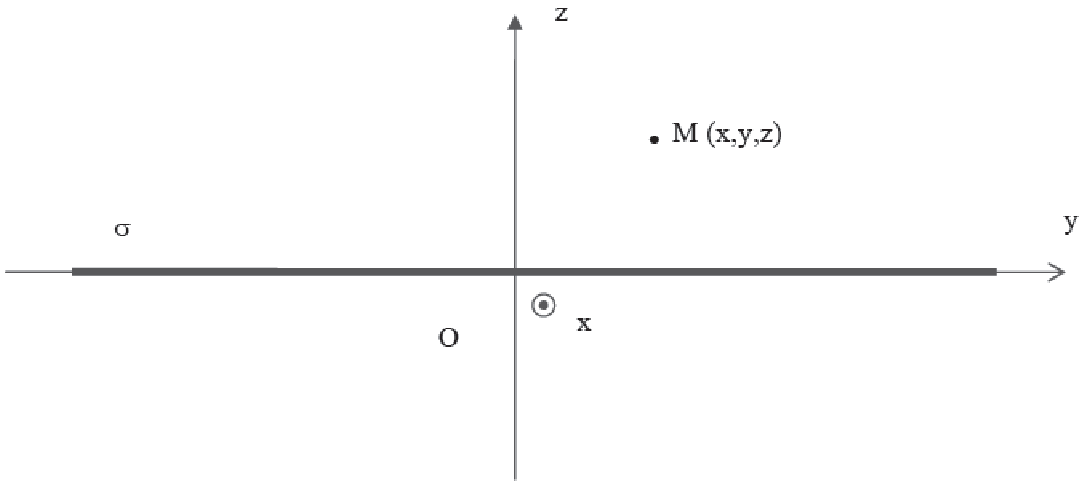

Figure 1

1) Montrer, par des considérations de symétrie, que le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par le plan uniformément chargé est perpendiculaire au plan en tout point de l'espace. On écrira donc $\vec{E}(M)=E(x,y,z)\overrightarrow{u_z}$. Justifier le fait que le champ électrique $\vec{E}(M)$ne peut pas dépendre des coordonnées x et y du point M, soit $\vec{E}(M)=E(z)\overrightarrow{u_z}$. Montrer par des considérations de symétrie que la fonction E(z) est impaire.

2) Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ est uniforme au-dessus et en-dessous du plan.

3) Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant d'un champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int}.

4) En appliquant le théorème de Gauss sur une surface qu'on précisera clairement en faisant un schéma, déterminer la valeur du champ électrique en fonction de σ, ε_0 (constante diélectrique du vide) et d'un vecteur unitaire judicieusement choisi qu'on précisera (on distinguera les deux cas : z > 0 et z < 0). Une démonstration très précise est attendue.

5) Toujours par des considérations de symétrie, déterminer la valeur E(0) du champ électrique dans le plan uniformément chargé.

6) Déterminer le potentiel électrique V(z) en tout point de l'espace en fonction de σ, ε_0 et z (on prendra le potentiel nul en z = 0). On distinguera toujours les deux cas : z > 0 et z < 0.

On supposera la continuité du potentiel en z = 0.

7) Tracer l'allure des courbes E(z) et V(z) en précisant les valeurs aux points remarquables.

On considère maintenant un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de e. Le plan supérieur est situé dans le plan $z=+\frac{e}{2}$ et le plan inférieur dans le plan $z=-\frac{e}{2}$. Le plan supérieur est chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur est chargé avec une densité surfacique opposée (donc négative) - σ.

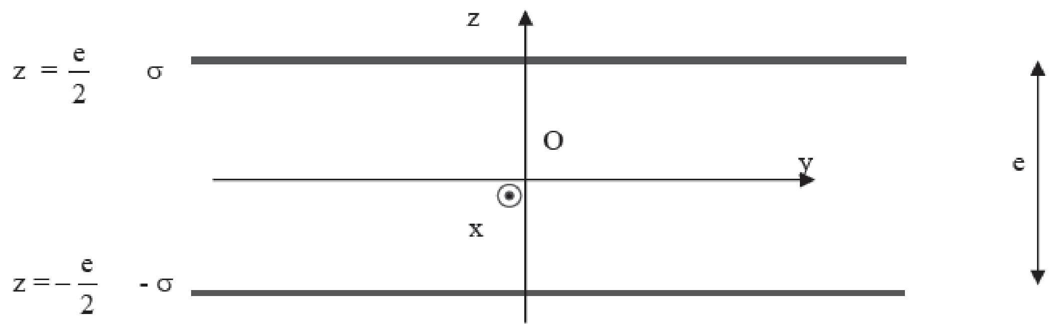

Figure 2

8) Déterminer le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace en fonction de σ, ε_0 et d'un vecteur unitaire qu'on précisera (on distinguera les trois zones délimitées par les deux plans). Porter sur un schéma le sens du champ électrique.

9) Calculer l'expression du potentiel électrostatique V(z) pour $z\in\left[-\frac{e}{2},\frac{e}{2}\right]$ en fonction de σ, z et ε_0.

On prendra toujours le potentiel nul en z = 0. Calculer la différence de potentiel U entre les deux plans infinis en fonction de σ, e et ε_0. Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de U et e.

Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques S. On supposera que les résultats trouvés pour le champ électrique et le potentiel ne diffèrent pas des résultats trouvés dans les questions précédentes, pourvu qu'on ne se place pas trop près des bords des armatures. L'armature supérieure porte alors la charge totale +Q et l'armature inférieure la charge totale -Q.

10) Après avoir exprimé σ en fonction de Q et S, en déduire la différence de potentiel U entre les deux armatures en fonction de Q, ε_0, e et S. Définir et exprimer la capacité C du condensateur formé en fonction de ε_0, e et S. Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur pour lequel on prendra : S ≈ 1 cm² et e ≈ 10^{-5} m.

11) Déterminer la densité volumique w_e d'énergie électrique dans le condensateur en fonction de ε_0, Q et S.

2) Condensateur cylindrique

On considère maintenant un condensateur cylindrique à air formé de deux armatures coaxiales de hauteur h et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. L'armature interne porte la charge électrique Q et l'armature externe la charge électrique –Q. Elles sont uniformément réparties en surface. Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2. Soit un point M situé à une distance r de l'axe : $R_1 < r < R_2$ (figure 3).

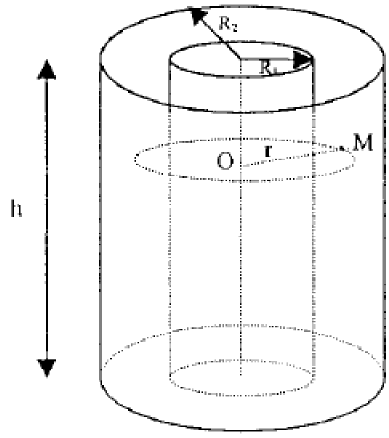

Figure 3

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite (OM) dirigé de O vers M.

12) Justifier que le champ électrique $\vec{E}$ créé au point M est radial et que sa norme ne dépend que de r dans l'espace inter-conducteur. On peut donc écrire : $\vec{E} = E(r)\vec{u}$.

13) Calculer la composante $E(r)$ du champ $\vec{E}$ entre les armatures en appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera.

14) Calculer la circulation du champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures en fonction de Q, ε_0 , h, R_2 et R_1.

15) Relier d'autre part (sans démonstration) cette circulation aux potentiels électriques des armatures V_1 et V_2.

16) Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de Q et des potentiels électriques des armatures V_1 et V_2, puis en fonction de ε_0 , h, R_2 et R_1.

17) Calculer C pour R_1 = 10 cm, R_2 = 20 cm et h = 50 cm.

18) Que devient l'expression de C si les rayons des armatures sont très voisins, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$?

Montrer que le condensateur cylindrique est alors équivalent à un condensateur plan dont on donnera les caractéristiques (épaisseur e' et surface S').

19) Pour quelle valeur de r la norme du champ électrique est-elle maximale ?

On souhaite que cette valeur maximale ne dépasse pas la valeur E_0 afin d'éviter un claquage du condensateur. Calculer alors la valeur maximale V_{max} de la différence de potentiel pouvant être appliquée entre les armatures en fonction de E_0, R_1, et R_2.

20) Calculer V_{max} pour $E_0 = 3MV.m^{-1}$.