

# Devoir surveillé 1

---

**L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.**

## **Instructions générales**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les résultats numériques peuvent être donnés sous forme approchée.

Il est proposé à titre indicatif la répartition suivante des points :

- Partie I : 35 %
- Partie II : 30 %
- Partie III : 35 %

On se propose dans ce sujet d'étudier la façon dont les météorologistes sondent les basses couches de l'atmosphère (troposphère et basse stratosphère) pour tenter de comprendre et de modéliser les phénomènes météorologiques, en vue notamment de répondre à la difficile question : « Quel temps fera-t-il demain ? »

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur terrestre  $y$  est supposé uniforme :  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  où le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  est orienté selon la verticale ascendante. L'altitude  $z=0$  correspond à la surface des mers et océans.

L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits. On note  $c_p$  la capacité thermique massique de l'air à pression constante. On note  $\mu$  la masse volumique de l'air.

Données :

- Accélération de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
- Constante des gaz parfait :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'hélium :  $M(\text{He}) = 4 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'azote :  $M(\text{N}) = 14 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'oxygène :  $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'air :  $M_a = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}$
- Rapport des capacités thermiques massiques de l'air :  $\gamma = 1,40$
- Enthalpie massique de vaporisation de l'eau (supposée indépendante de la température) :  
 $l_{\text{vap}} = 2,25 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$
- Pression de l'air à  $z=0$  :  $P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Température de l'air à  $z=0$  :  $T_0 = 300 \text{ K}$
- Masse volumique du mercure dans les conditions standard :  $\mu_{\text{Hg}} = 1,35 \cdot 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$

## I) Atmosphère en équilibre

### I.1) Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre hydrostatique de l'air dans l'atmosphère terrestre. On adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme  $T_0$ .

- 1) En considérant les deux principaux constituants de l'air, justifier la valeur de  $M_a$ .
- 2) Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.
- 3) Exprimer la masse volumique de l'air  $\mu$  en fonction de sa pression  $P$ , la constante des gaz parfaits  $R$ , sa température  $T_0$  et sa masse molaire  $M_a$ .
- 4) Écrire l'équilibre d'un volume infinitésimal d'atmosphère situé entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ . En déduire la relation de statique des fluides donnée par :  $\frac{dP}{dz} = -\mu g$
- 5) En déduire  $P(z)$ . Définir une longueur caractéristique  $H$  des variations de la pression et la calculer à 300 K. Donner aussi l'expression de  $\mu(z)$ .
- 6) A quelle altitude  $z_{50\%}^{iso}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$  ?

### I.2) Atmosphère réelle

Les données transmises par un ballon-sonde au cours de la traversée de la troposphère et de la basse stratosphère permettent de tracer les profils réels de température et de pression y régnant. Les résultats expérimentaux sont rassemblés sur le document 1 ci-après.

- 7) Quelle différence essentielle y-a-t-il entre la stratosphère et la troposphère ?
- 8) Que pensez-vous du modèle vu en I.1 de l'atmosphère isotherme pour décrire la troposphère ? On comparera les profils réels de température et de pression avec les résultats du modèle (document 2).

### I.3) Atmosphère en équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air

vérifie une loi linéaire du type  $T = T_0(1 - \alpha z)$  où  $\alpha = \frac{1}{z_0}$  est une constante positive. Cette

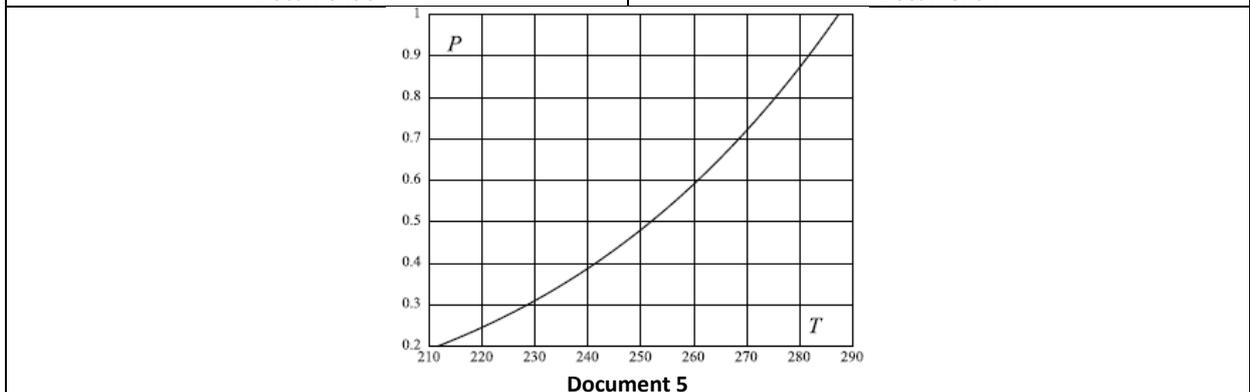
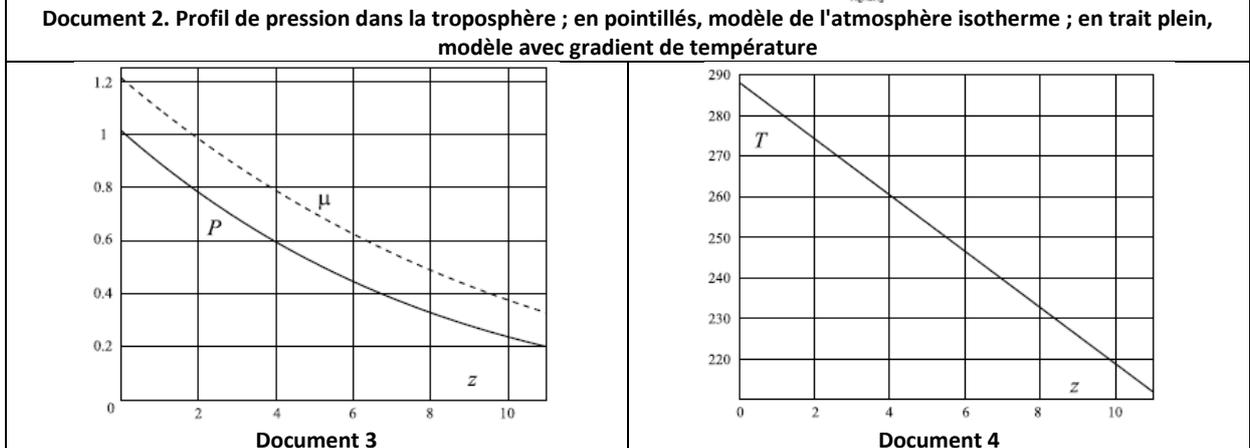
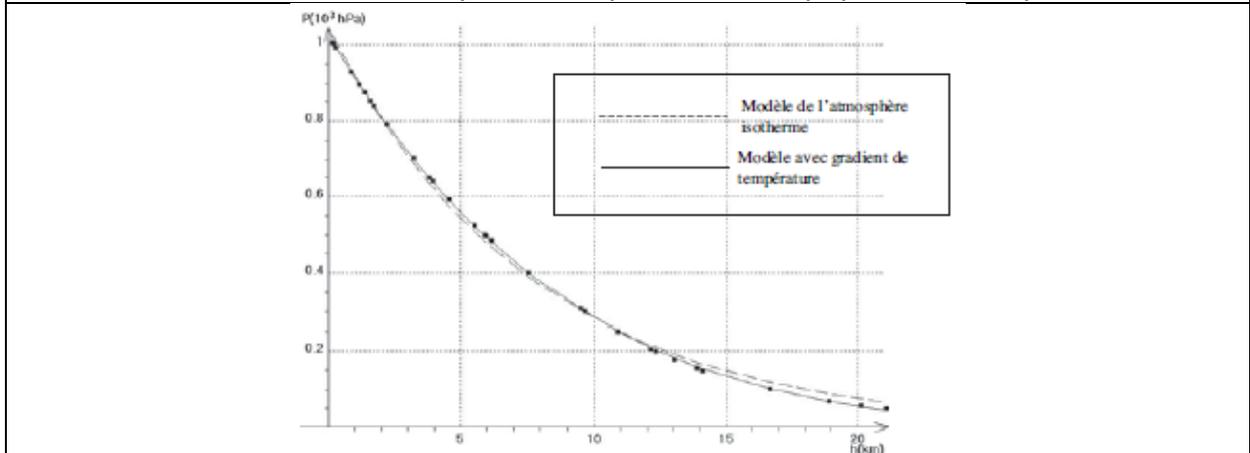
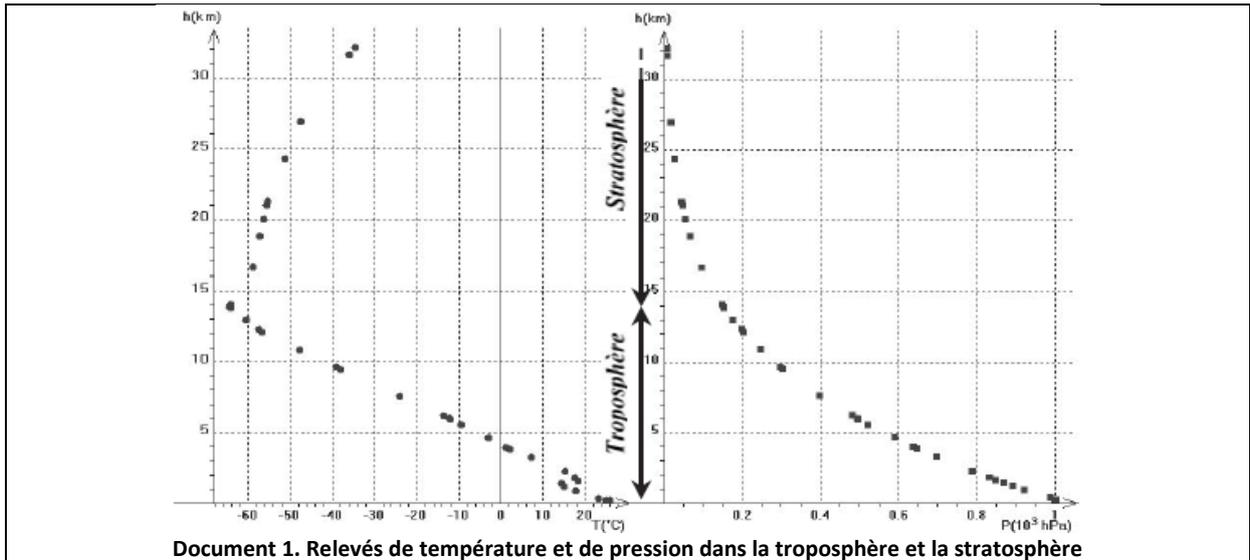
approximation linéaire est le développement au premier ordre en  $\frac{z}{z_0}$  d'une expression plus précise.

$z_0 \approx 33 \text{ km}$  justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

- 9) Montrer que l'on peut écrire  $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta$  et  $\mu(z) = \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$  où l'on donnera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $H$  et de  $z_0$ .
- 10) A quelle altitude  $z_{50\%}^{pol}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$  ? Comparer à la valeur obtenue à la question 6. Ce résultat était-il prévisible ?
- 11) Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les documents 3, 4 et 5. La pression est donnée en hPa, la température en K, la masse volumique en  $\text{kg.m}^{-3}$  et l'altitude en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d'obtenir les relations

$$T = 288,14 - 6,94z \quad \text{et} \quad P = 1,01 \left( \frac{T}{288,08} \right)^{5,26}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?



## II) Pression et prévision météorologique

### II.1) Définitions

**12)** Énoncer le premier principe de la thermodynamique. On donnera le nom des grandeurs utilisées, ainsi que leur unité.

**13)** Donner la relation de Mayer qui relie les capacités thermiques  $C_V$  et  $C_P$ , la constante des gaz parfaits  $R$  et la quantité de matière  $n$ .

Déduire de la relation de Mayer la relation entre  $c_V$ ,  $R$ ,  $n$  et  $\gamma$  d'une part, et entre  $c_P$ ,  $R$ ,  $n$  et  $\gamma$  d'autre part. On donne :  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$ .

**14)** Rappeler l'expression différentielle de la variation d'énergie interne  $dU$  d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température  $T$ .

**15)** Énoncer le second principe de la thermodynamique. On donnera le nom des grandeurs utilisées, ainsi que leur unité.

**16)** Redémontrer l'expression de la première identité thermodynamique.

**17)** Rappeler l'expression différentielle de la variation d'entropie  $dS$  de  $n$  moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température  $T$ , du volume  $V$ , de  $n$ ,  $R$  et  $\gamma$ .

Que devient cette expression si l'on utilise les variables  $T$  et  $P$  ?

### II.2) Transformations de l'air atmosphérique

On se situe en un point du globe à altitude nulle. En fonction du moment de la journée, la température de l'air varie.

**18)** On suppose que l'air subit une transformation isobare. Que peut-on dire de la variation de la masse volumique de l'air ? Commenter.

**19)** On suppose maintenant et pour les questions suivantes que l'air subit une transformation adiabatique. Expliquez ce terme.

**20)** Si de plus cette transformation est réversible, que peut-on dire de la variation d'entropie au cours de la transformation ? Trouver alors une relation reliant température  $T$  et pression  $P$  de l'air en fonction du coefficient  $\gamma$ . Expliquer alors que la température diminue quand l'altitude augmente.

### II.3) Influence de la vapeur d'eau

Bien que présente en faible quantité dans l'air atmosphérique, la vapeur d'eau est un gaz jouant plusieurs rôles fondamentaux dans le fonctionnement de l'atmosphère. En sa présence, la pression  $P_h$  de l'air dit "humide" est égale à la pression  $P$  de l'air sans vapeur d'eau (appelé "air sec"), augmentée d'une valeur  $P_e$  appelée pression partielle de vapeur d'eau telle que  $P_h = P + P_e$ . Faible devant  $P$ , cette pression partielle ne peut dépasser une valeur maximale appelée pression de vapeur saturante  $P_{sat}$  qui n'est fonction que de la température  $T$ .

**21)** Citer les différents états sous lesquels peut se trouver l'eau dans l'atmosphère. Tracer le diagramme  $(P_e, T)$  de l'eau.

**22)** Pourquoi dit-on que  $P_{sat}$  ne dépend que de la température ? Comment varie la valeur de  $P_{sat}$  avec la température ?

**23)** Représenter l'allure du diagramme de Clapeyron de l'eau. Indiquer la position du point critique C, les domaines liquide (L), liquide + vapeur (L+V), et vapeur (V). Représenter, sur le diagramme

précèdent l'allure de trois isothermes : l'isotherme critique  $T_c$ , puis deux isothermes  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $T_1 < T_2 < T_c$ .

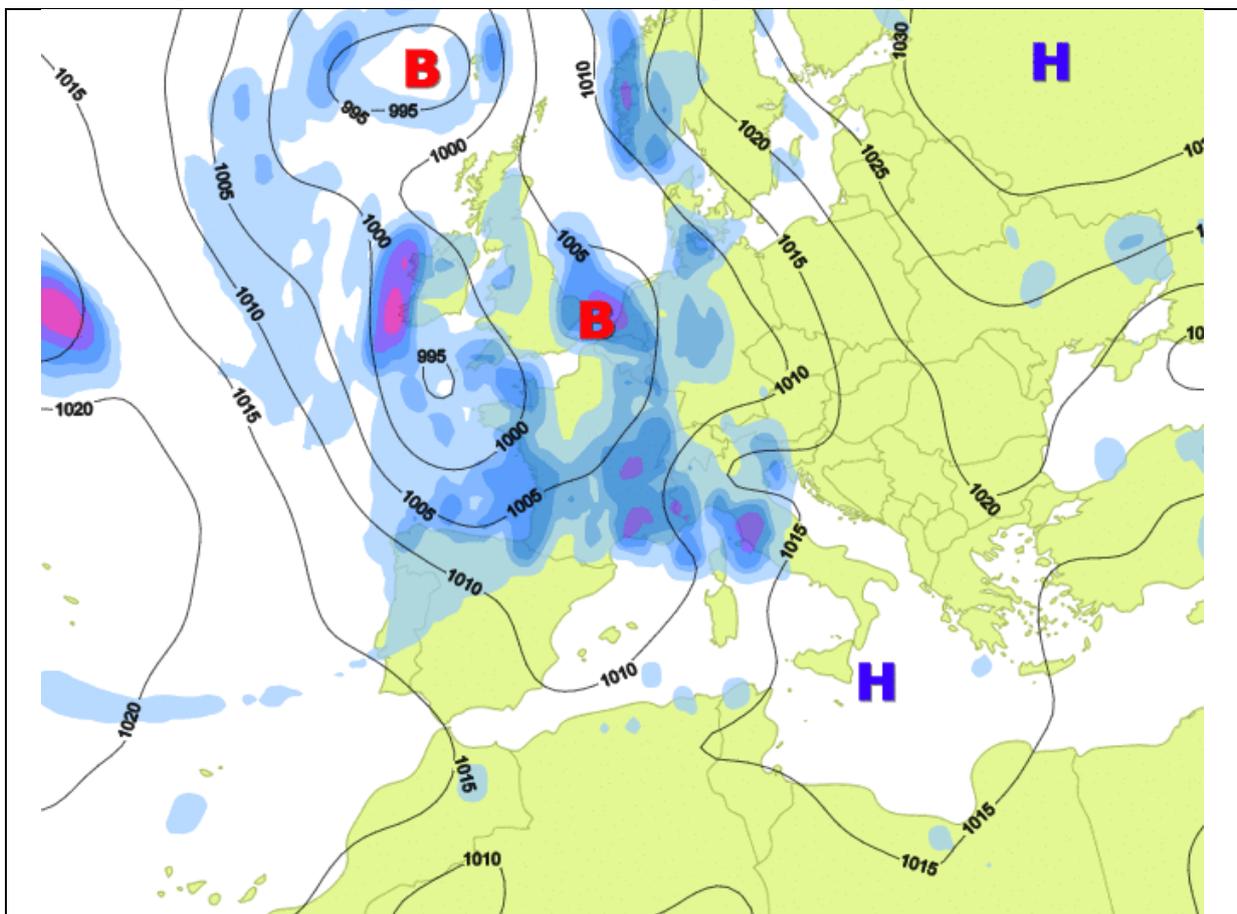
**24)** Dans le domaine de la vapeur sèche du diagramme de Clapeyron, que peut-on dire de la pente d'une transformation adiabatique par rapport à une isotherme ? On justifiera la réponse apportée.

#### II.4) Pression atmosphérique et temps associé

La pression atmosphérique n'est pas constante au cours du temps. Les variations horizontales de pression atmosphérique engendrent les vents, l'air s'écoulant d'une zone de haute pression vers une zone de basse pression. En météorologie, on appelle dépression un centre de basse pression et anticyclone un centre de haute pression. Le document 6 montre les variations de la pression atmosphérique au-dessus de la France le 13 Septembre 2015 à 20h.

**25)** Expliquer la formation des nuages en vous aidant du document 7 et des questions précédentes.

**26)** Quel temps faisait-il le 13 Septembre 2015 à Nice ? Expliquez votre réponse.



Document 6. Pression atmosphérique en France le 13 Septembre 2015 à 20 h (<http://www.meteorama.fr/>)

[...] Les dépressions apportent généralement du mauvais temps et des ciels couverts ainsi que tous les phénomènes météorologiques qui y sont relatifs comme les averses, les orages, les ouragans ou les tempêtes car le mouvement vertical de l'air y est vers le haut (ascendance) suite à une convergence des vents près du sol et d'une divergence en altitude. Ce processus diminue la température de l'air, parce qu'il subit une détente adiabatique, et il arrive un point où celle-ci atteint la valeur de saturation par rapport à l'humidité contenue dans la parcelle d'air. Il y a à partir de ce niveau condensation d'une partie de plus en plus grande de la vapeur d'eau dans la parcelle qui forme un nuage. Si le mouvement vertical se poursuit, les gouttelettes de nuages formeront des gouttes de pluie ou des flocons, selon la température ambiante. [...]

Document 7. Extrait de « Dépression », Wikipédia

### III) Mesure de la pression atmosphérique

Toute prévision météorologique est basée sur un modèle fiable de l'atmosphère, rendant compte en particulier de la pression, de la température et de l'hygrométrie (humidité de l'air) en différents points de l'espace.

#### Le saviez-vous ?

Torricelli, en 1643-1644, a retourné dans une cuvette de mercure des tubes de diamètres différents remplis du même liquide pour constater que le niveau de mercure obtenu était toujours le même quel que soit le diamètre des tubes : 760 millimètres.

En 1648, Pascal a démontré, en faisant gravir au tube de Torricelli le Puy de Dôme, que la pression diminue avec l'altitude et que le bout du tube est rempli de... vide !

#### Mesurer la pression en météorologie

L'instrument de mesure de la pression atmosphérique est le baromètre. Les météorologistes appliquent des normes définies par l'Organisation météorologique mondiale pour pouvoir comparer les mesures de pression entre elles. Elles sont ainsi ramenées au niveau de la mer et les baromètres sont calés pour indiquer la pression au niveau de la mer.

Il existe plusieurs types de baromètres :

- Le baromètre à mercure – de plus en plus rare du fait de la législation sur le mercure – indique la pression exacte du lieu. Il faut corriger cette pression de l'altitude pour obtenir la pression au niveau de la mer.

- Le baromètre anéroïde contient une ou plusieurs capsules à vide (capsule de Vidie) qui s'écrase plus ou moins en fonction de la pression. Cette variation est amplifiée par un mécanisme déplaçant une aiguille sur un cadran.

- Les baromètres utilisés par Météo-France sont des baromètres numériques compensés en température. En effet, le capteur étant sujet à dilatation en fonction de la température, la mesure de pression est corrigée grâce à un capteur de température.

En météorologie, on mesure aussi la variation de la pression avec l'altitude avec un capteur placé sous un ballon : c'est le radiosondage. C'est la connaissance fine des variations horizontales et verticales de la pression atmosphérique qui permet de déterminer les mouvements de l'atmosphère.



Baromètre anéroïde



Ballon-sonde

#### Variation horizontale de la pression atmosphérique

Au niveau de la mer, la pression moyenne est de 1 013,25 hPa.

En France métropolitaine, entre 1951 et 2012, on a relevé 951,8 hPa le 25 février 1989 à la Pointe de La Hague (Manche) et 1048,9 hPa à la pointe de Chemoulin (Loire-Atlantique) le 3 mars 1990.

Document 8. Extraits (<http://www.meteofrance.fr/>)

### III.1) Baromètre à mercure

**27)** Expliquer l'expérience menée par Torricelli. On en donnera un schéma et on s'appuiera sur un calcul pour retrouver la valeur de 760 mm donnée dans le document 8. Pourquoi le diamètre du tube ne change-t-il pas la hauteur de mercure ?

**28)** Commenter l'extrait suivant du document 8 : « le bout du tube est rempli de... vide ! ».

**29)** En utilisant le modèle d'atmosphère polytropique (donné en I.3), déterminer la valeur de la pression au sommet du Puy de Dôme d'altitude  $z_p = 1465m$ . Quelle serait alors la hauteur de la colonne de mercure ?

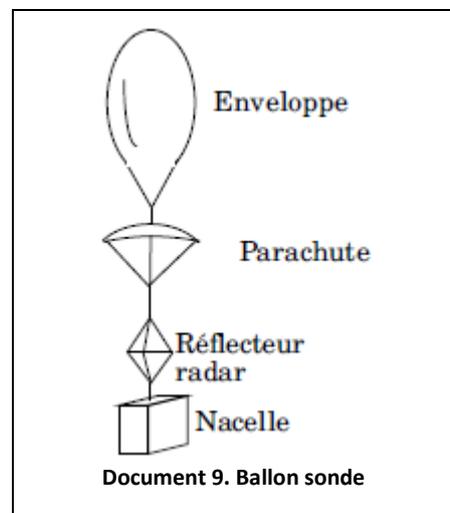
### III.2) Ballon sonde

Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer une charge dans les différentes couches de l'atmosphère. Les ballons météorologiques, embarquant du matériel scientifique de mesure, explorent par exemple toute la troposphère et la basse stratosphère.

#### III.2.a) Le ballon stratosphérique ouvert

On considère le ballon-sonde, représenté sur le document 9 ci-contre, composé :

- d'une enveloppe supposée sphérique, de volume  $V = 100m^3$  (correspondant à un diamètre de l'ordre de 6m, ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situées à la base du ballon ;
- d'un parachute permettant de ralentir la descente du ballon à la fin de la mission ;
- d'un réflecteur radar rendant plus facile le suivi à distance du ballon ;
- d'une nacelle, contenant les appareils de mesure, le système de télécommunication et de positionnement GPS.



Dans ce type de ballon, l'enveloppe est indéformable et garde un volume  $V$  constant. Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium. On se place dans le modèle de l'atmosphère isotherme. On suppose que la température à l'intérieur du ballon reste constante, égale à la température extérieure  $T_0$ . La masse  $m$  de l'ensemble {enveloppe + parachute + réflecteur + nacelle} reste constante au cours du vol. Le volume du ballon est assimilé à celui de son enveloppe.

**30)** Déterminer la masse  $m_{gaz}$  de gaz contenue dans l'enveloppe au décollage.

**31)** Rappeler l'expression de la poussée d'Archimède.

**32)** Effectuer un bilan des forces précis s'exerçant sur le ballon au moment du décollage. En déduire une condition sur  $m$  pour que le ballon décolle effectivement. Faire l'application numérique.

On considère dans la suite  $m = 10kg$ .

**33)** Expliquer ce qui se passe dans le ballon au cours de son ascension.

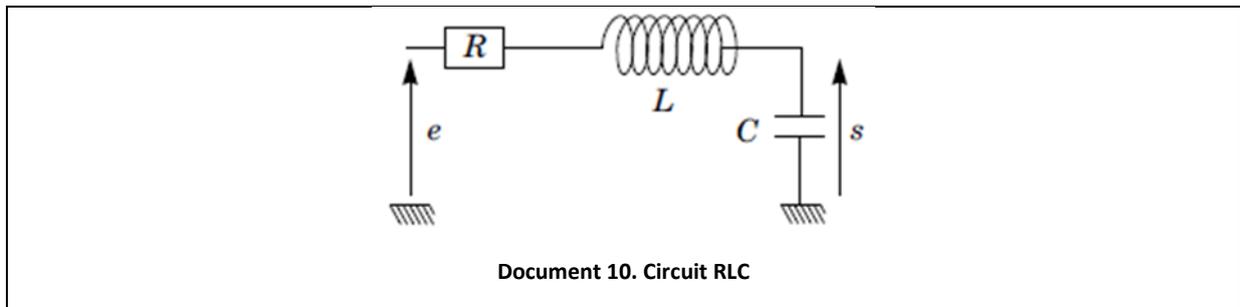
**34)** Le plafond est atteint lorsque le ballon est à son altitude maximale. À quelle condition le ballon plafonne-t-il ? Estimer alors l'altitude maximale atteinte par le ballon-sonde.

Dès que le plafond est atteint, un système de largage libère le ballon de son enveloppe. Le ballon entame alors sa descente, ralentie par le parachute. Une fois retrouvés au sol, les appareils de mesure pourront servir une nouvelle fois pour une prochaine mission.

### III.2.b) Liaison radiosonde - récepteur

Le ballon-sonde communique avec la station météo grâce à une radiosonde qui émet un signal électromagnétique de haute fréquence (onde UHF) de valeur  $f = 100\text{MHz}$ . Le signal reçu par un cadre récepteur est amplifié puis envoyé via un câble coaxial vers un dispositif qui effectue son analyse. On étudie ici le circuit amplificateur.

Le signal obtenu aux bornes du cadre récepteur puis amplifié est envoyé sur un circuit (voir document 10).



**35)** Donner l'expression de la fonction de transfert de ce montage. On notera

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad 2m = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$$

Que représentent ces grandeurs ? Quelle est la nature de ce montage ? On ajuste les valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C$  afin que la fréquence  $f$  du signal d'entrée satisfasse à la condition suivante :  $f = f_0$ . On considère cette condition réalisée dans la suite de cette partie.

**36)** Quel est l'influence de  $Q$  dans un filtre du second ordre ? Quel est l'intérêt de réaliser la condition précédente ?

**37)** La valeur de l'inductance est  $L = 0,10\mu\text{H}$ , calculer la valeur de  $C$  permettant d'obtenir la condition précédente.

**38)** Exprimer le gain du montage en fonction valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C$  puis en fonction de  $Q$ .

**39)** Donner la valeur de  $R$  permettant d'obtenir un gain de 20 dB.

**40)** Tracer le diagramme de Bode du filtre précédent.