

Devoir surveillé 3

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Il est proposé à titre indicatif la répartition suivante des points :

- Partie I : 30 %
- Partie II : 35 %
- Partie III : 35 %

A l'occasion de la COP 21 qui s'est tenue du 30 Novembre au 11 Décembre 2015, nous avons décidé de nous intéresser à la production d'électricité en France, notamment à partir de centrales nucléaires (75 % de la production d'électricité).

I) Extraction du minerai d'uranium

Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope fissile, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4%. Avant utilisation dans une centrale, le minerai doit donc d'abord être traité afin de produire ce combustible.

I.1) Propriétés de l'uranium

1) L'uranium est un élément qui possède plusieurs isotopes. Rappeler la définition d'un isotope. Citer deux isotopes d'un autre élément.

Les deux principaux isotopes de l'uranium sont ${}_{92}^{235}\text{U}$ et ${}_{92}^{238}\text{U}$ de masses molaires respectives $235,0439\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $238,0508\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

2) Donner la composition du noyau de chacun des isotopes de l'uranium.

3) La masse molaire de l'uranium naturel est de $238,0289\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. En déduire la teneur en uranium 235 de l'uranium naturel.

4) L'uranium métallique existe sous trois formes cristallines notées α , β et γ . La variété γ (entre 775°C et 1130°C) cristallise sous une forme cubique centrée. Représenter la maille. Combien cette maille contient-elle d'atomes ?

5) Le paramètre de maille est de 350pm . En déduire le rayon atomique de l'uranium dans cette structure.

I.2) Du minerai au combustible

Le principal minerai d'uranium est la pechblende qui contient essentiellement U_3O_8 . Selon les gisements, la teneur initiale est de 1 à 2 kg d'uranium par tonne de minerai. Ce minerai est donc dans un premier temps traité sur place afin d'éviter d'énormes frais de transport. Les premières étapes consistent, après extraction du minerai dans la mine, à un concassage puis à un broyage afin de le réduire sous forme de fine poudre ($450\mu\text{m}$ environ) avec addition d'eau.

La pechblende U_3O_8 est en fait un mélange des deux oxydes précédents. Sa composition se déduit de l'équation suivante : $\text{U}_3\text{O}_8 = \text{UO}_2 + 2\text{UO}_3$

6) Quel est le degré d'oxydation de l'uranium dans UO_2 et UO_3 ?

La poudre issue du minerai subit une attaque par l'acide sulfurique en présence d'un oxydant puissant : le chlorate de sodium (Na^+ , ClO^-).

En présence d'eau, on travaillera avec les espèces $\text{U}_{(s)}$, U^{3+} , U^{4+} , UO_2^{2+} , $\text{U}(\text{OH})_{4(s)}$ et $\text{UO}_2(\text{OH})_{2(s)}$. Le diagramme potentiel-pH (pour $C_{\text{tracé}} = 1\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$) est fourni sur le document réponse, à rendre avec la copie.

7) Attribuer chaque domaine A à F à une espèce de l'uranium. On justifiera rapidement.

8) Calculer les équations des deux frontières verticales.

9) Déterminer les pentes des segments séparant B et F d'une part, A et F d'autre part.

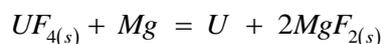
10) En quoi le point entouré est-il particulier ? Écrire la réaction que subit B au delà de ce point.

11) Calculer le potentiel du couple ClO_3^- / Cl^- en fonction du pH et superposer le graphe correspondant au diagramme potentiel-pH de l'uranium.

12) Sachant qu'on travaille en excès d'acide sulfurique et de chlorate de sodium, sous quelle forme trouvera-t-on l'uranium à la fin de cette étape ?

13) Écrire l'équation-bilan de la réaction de UO_2 avec ClO_3^- en milieu acide.

On utilise 1 à 2 kg de chlorate de sodium et 30 à 50 kg d'acide sulfurique par tonne de minerai. En réalité, le minerai est traité à 70°C environ pendant 6 à 7 heures. La solution obtenue comporte un certain nombre d'impuretés. Ces impuretés présentes sous forme de cations métalliques (Al^{3+} , Mg^{2+} , ...) passées en solution en même temps que l'uranium sont éliminées par précipitation sélective. A l'issue de ces purifications, on obtient une solution concentrée de nitrate d'uranyle $UO_2(NO_3)_2$. Après précipitation du nitrate et décomposition thermique, on obtient UO_3 avec une grande pureté. L'étape suivante consiste à réduire UO_3 en UO_2 puis à le transformer en UF_4 . La dernière étape amenant à l'obtention d'uranium métallique consiste en une réaction de magnésiothermie, le tétrafluorure d'uranium réagit avec le magnésium selon la réaction :



Données (à 298 K):

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Masses molaires atomiques (en $g \cdot mol^{-1}$) : $H : 1 ; C : 12 ; O : 16$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \Rightarrow \frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06V$

Constantes de solubilité : $U(OH)_{4(s)} = U^{4+} + 4HO^- \quad K_{S1} = 10^{-49}$

$UO_2(OH)_{2(s)} = UO_2^{2+} + 2HO^- \quad K_{S2} = 10^{-24}$

Autoprotolyse de l'eau : $2H_2O = H_3O^+ + HO^- \quad K_e = 10^{-14}$

Potentils standard d'oxydo-réduction E^0 à $pH = 0$

Couple	$U^{3+} / U_{(s)}$	U^{4+} / U^{3+}	$H_3O^+ / H_{2(g)}$	$O_{2(g)} / H_2O$	ClO_3^- / Cl^-
E^0	-1,80V	-0,63V	0,00V	1,23V	1,45V

II) Le stockage des déchets

Le stockage des déchets radioactifs constitue un problème majeur dans la poursuite du programme nucléaire des nations. De nombreuses solutions sont à l'étude. Une d'entre elles a pour but d'enfouir, dans la roche, ces résidus inutilisables en les incorporant au béton. On se propose, ici, d'étudier un des problèmes posés par cette méthode : le contrôle de la production de chaleur.

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Une paroi d'épaisseur l , comprise entre deux plans infinis et parallèles, perpendiculaires à l'axe Ox , est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ , de masse volumique μ et de coefficient thermique massique isobare c_p . Les grandeurs λ , μ et c_p sont constantes, et les dimensions de la paroi sont invariables.

La face F_1 , d'abscisse $x=0$, est maintenue à la température T_1 constante. La seconde face F_2 , située en $x=l$, se trouve à une température $T_{(x=l)}$. Soit Φ_u le flux thermique algébrique qui traverse une section droite, d'aire S , orthogonale à l'axe Ox et orientée par le vecteur unitaire \vec{u}_x .

14) Relier le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} au flux thermique Φ_u .

15) Enoncer la loi de Fourier et la simplifier dans ce cas unidimensionnel. A quel type de transfert thermique s'applique-t-elle ?

II.1) Conduction thermique simple dans le matériau

La face F_2 est maintenue à la température T_2 (avec $T_1 > T_2$, et T_1 et T_2 constantes). On considère la tranche cylindrique de section droite, d'aire S , comprise entre les plans d'abscisse x et $x+dx$ (figure 1).

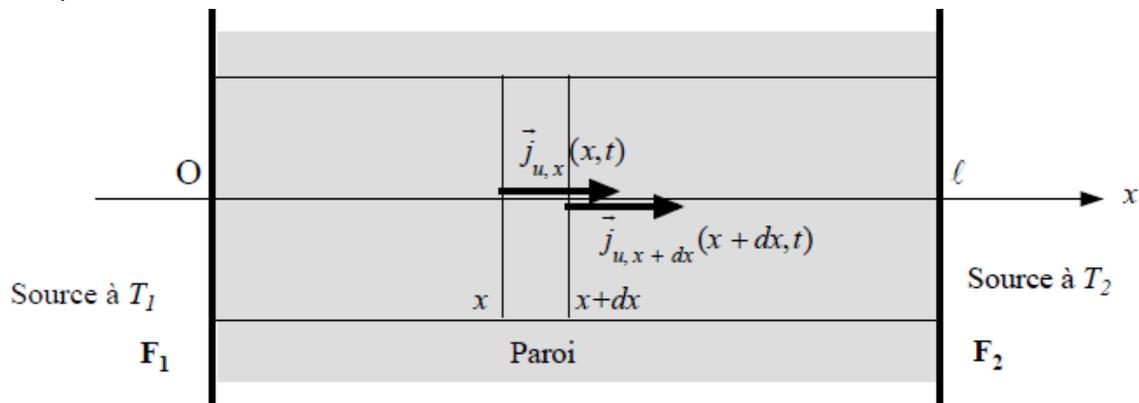


Figure 1. Paroi d'épaisseur l

16) En raisonnant sur la tranche élémentaire de longueur dx , montrer que l'équation différentielle de la chaleur à laquelle satisfait la température se met sous la forme : $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$.

Exprimer la constante A en fonction de λ , μ et c_p .

17) Que devient cette équation en régime stationnaire ? En déduire l'expression de $T(x)$.

18) Donner en fonction de λ , l , S , T_1 et T_2 , l'expression du flux de chaleur Φ_u à travers une section droite de surface S orientée par le vecteur unitaire \vec{u}_x .

19) Tracer l'allure de la courbe représentation de la fonction $T(x)$.

20) Définir la notion de résistance thermique. On donnera toutes les hypothèses et on retrouvera son expression à partir de celle du flux de chaleur Φ_u .

II.2) Diffusion thermique dans un combustible nucléaire

Le matériau est maintenant un mélange, supposé homogène, de résidus radioactifs et de béton. Il se dégage, dans ce matériau, une puissance thermique volumique σ_u , créée par les réactions nucléaires résiduelles qui s'y produisent et répartie uniformément dans tout le volume. La paroi est donc soumise à la création interne de chaleur et à l'écoulement thermique. Les faces F_1 et F_2 sont toujours maintenues aux températures respectives T_1 et T_2 . Le système est stationnaire et la température $T(x)$ ne dépend que de l'abscisse x .

21) Effectuer un bilan d'énergie thermique sur une tranche d'épaisseur dx et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ se met sous la forme : $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\sigma_u}{\lambda}$.

22) En déduire l'expression de $T(x)$.

23) Etablir les expressions des flux thermiques algébriques $\Phi_{u,0}$ et $\Phi_{u,1}$ mis en jeu respectivement en $x=0$ et $x=l$.

24) Exprimer la puissance thermique créée au sein du mur de béton en fonction de $\Phi_{u,0}$ et $\Phi_{u,1}$. Commenter.

Pour des raisons de sécurité, chacune des faces F_1 et F_2 est protégée par une plaque métallique collée contre elle, d'épaisseur et de résistance thermique négligeables. Ce coffrage est arrosé en permanence avec de l'eau froide et on considère que ces plaques métalliques, ainsi que les faces qu'elles protègent, sont à la température T_0 de l'eau ($T_1 = T_2 = T_0$).

25) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(x)$.

26) Déterminer l'abscisse $x = x_m$ pour laquelle la température $T(x_m) = T_m$ est maximale.

27) Donner en fonction de σ_u , l , λ et T_0 , l'expression de la température T_m .

28) Quelle est l'influence de l'épaisseur l sur la température maximale T_m ?

29) Application numérique. Calculer, en $x=l$, le flux $\Phi_{u,1}$ à travers une section droite S de $1m^2$. Calculer T_m .

30) Pour des raisons de sécurité, la température de 500 K est une température limite qui, à l'intérieur du matériau, ne doit pas être dépassée. Calculer l'épaisseur maximale l_m de la paroi de béton.

II.3) Refroidissement par échange radioconvectif

La face F_1 est maintenue à la température T_0 . Seule la plaque métallique, en contact avec la face F_2 , n'est plus arrosée, et les échanges superficiels ne s'y font plus que par rayonnement et convection avec l'air extérieur qui est à la température T_{ext} constante (figure 2).

On définit, dans ce cas, un coefficient d'échange radioconvectif h_{rc} qui tient compte des deux modes de transfert thermique. On admet que le flux thermique total, à travers une surface S de la face F_2 , s'écrit : $\Phi_{rc} = h_{rc}S(T_{(x=l)} - T_{ext})$, avec h_{rc} constante positive. On prendra $T_0 = T_{ext}$.

31) Quelle relation simple existe-t-il, en $x=l$ et pour une même surface S , entre le flux de conduction, noté $\Phi'_{u,1}$, et le flux radioconvectif Φ_{rc} ?

32) Déterminer l'expression de $T(x)$.

33) Application numérique. Calculer, en $x=l$, le flux $\Phi'_{u,l}$ à travers une section droite S de $1m^2$. Comparer la valeur des flux $\Phi_{u,l}$ et $\Phi'_{u,l}$. Que peut-on en conclure ?

34) Donner la limite de la valeur $T_{(x=l)}$ lorsque le coefficient d'échange radioconvectif h_{rc} tend vers l'infini.

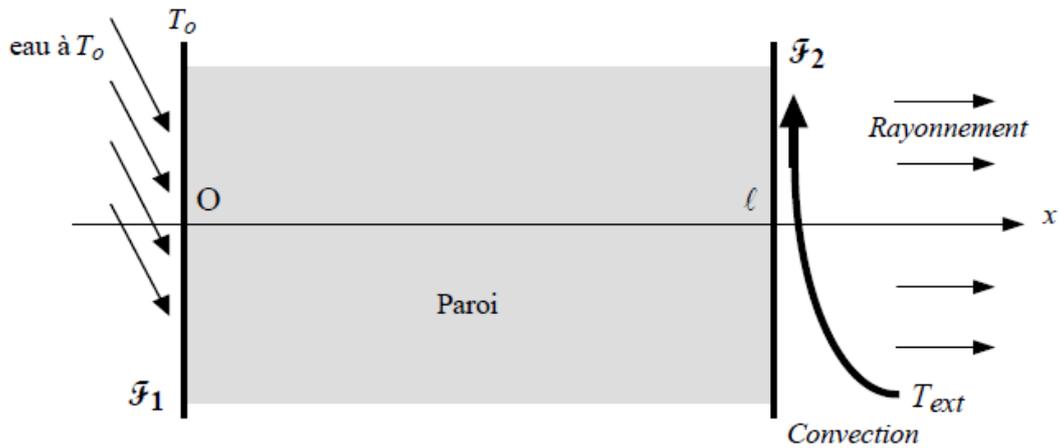


Figure 2. Paroi avec échange radioconvectif

Données :

$$\sigma_u = 3,00kW.m^{-3} \quad ; \quad l = 0,50m \quad ; \quad \lambda = 1,20W.m^{-1}.K^{-1} \quad ; \quad T_0 = T_{ext} = 290K \quad ; \quad h_{rc} = 5W.m^{-2}.K^{-1}$$

III) A propos des oscillateurs électroniques

Les amplificateurs Linéaire Intégrés (notés ALI par la suite) utilisés dans ce problème sont identiques et supposés idéaux. La tension de saturation en sortie de ces ALI est notée V_{sat} .

III.1) Préliminaires

On considère une fonction du temps t , $V(t)$, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0 \quad \text{avec } Q \text{ et } \omega_0 \text{ qui désignent des coefficients réels et constants}$$

35) Quelles sont les dimensions et noms de Q et ω_0 .

36) Le graphe en figure 3 représente la fonction $V(t)$ pour un couple de valeurs Q et ω_0 . Caractériser brièvement l'allure de la courbe. Quel est le signe de Q ? Quel est le signe du discriminant associé à l'équation caractéristique de l'équation différentielle ci-dessus ? Que peut-on dire de la valeur de V à l'instant initial ? Justifier vos réponses.

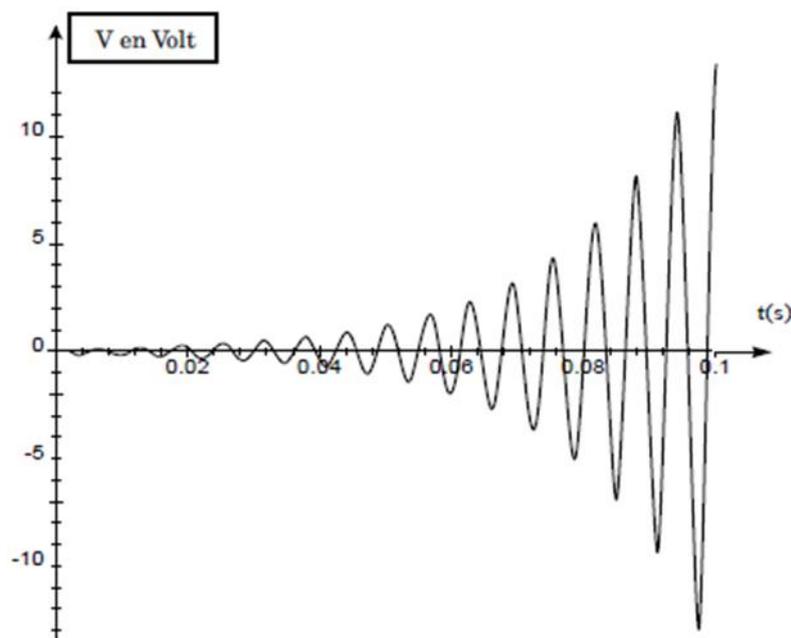


Figure 3. Fonction $V(t)$

37) En mesurant directement sur la figure 3 les amplitudes et la pseudopériode des oscillations, donner les valeurs numériques approximatives de Q et ω_0 .

III.2) Montage de base

38) Quel type de fonction est réalisé par le montage de la figure 4. Montrer que l'ALI fonctionne en régime linéaire. Exprimer alors la fonction de transfert $\underline{G}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ en fonction de R_1 et R_2 .

39) Dans quel domaine de tensions V_1 peut-il varier sans provoquer la saturation de l'ALI ? On définira une valeur critique V_{1C} que l'on exprimera en fonction de V_{sat} et $G = |\underline{G}|$.

40) Tracer la courbe représentant V_2 en fonction de V_1 pour V_1 variant de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$.

41) On considère le « filtre de Wien » représenté figure 5 et on suppose qu'aucun courant ne sort de ce filtre ($i_4 = 0$). Quelle est la fonction réalisée par ce filtre ? Justifier votre réponse sans calcul.

42) Montrer que les tensions d'entrée V_3 et de sortie V_4 sont liées par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V_4}{dt^2} + a\omega_0 \frac{dV_4}{dt} + \omega_0^2 V_4 = \omega_0 \frac{dV_3}{dt}$$

Exprimer le coefficient ω_0 en fonction de R et C et déterminer la valeur numérique du paramètre a , valeur que l'on utilisera ultérieurement.

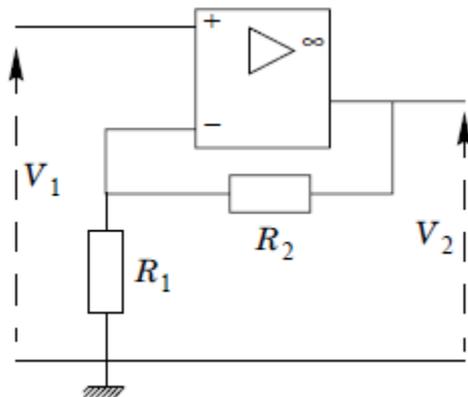


Figure 4. Montage à base d'ALI

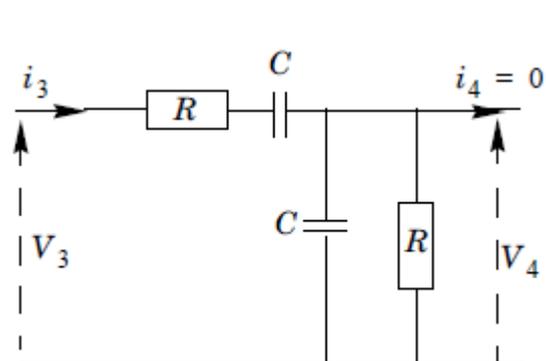


Figure 5. Filtre de Wien

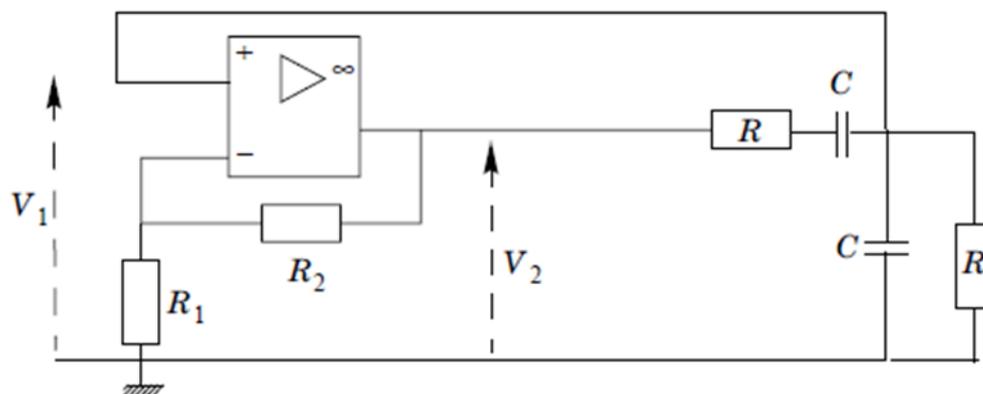


Figure 6. Oscillateur à pont de Wien

43) On relie le montage à base d'ALI (A) et le filtre suivant le schéma de la figure 6. Montrer que l'on peut utiliser l'équation obtenue à la question 42.

44) Montrer que la tension V_1 est régie par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d^2V_1}{dt^2} + a_1\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0 & \text{si } |V_1| \leq V_{1C} \\ \frac{d^2V_1}{dt^2} + a_2\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0 & \text{si } |V_1| > V_{1C} \end{cases}$$

Exprimer le coefficient a_1 en fonction de G et déterminer la valeur numérique du coefficient a_2 .

45) Montrer que la tension V_1 est une fonction continue du temps.

46) Quelle valeur minimale G_0 doit-on donner à G pour faire fonctionner l'oscillateur ? Pourquoi ? Dans toute la suite de ce problème, on supposera évidemment $G > G_0$.

47) On donne à G la valeur $G_1 = 3,1$ et on observe la tension V_1 représentée sur la figure 7. Commenter de manière précise et claire la forme du graphe. On distingue en particulier deux régimes successifs : un régime transitoire où l'amplitude des oscillations augmente et un régime établi où l'amplitude des oscillations reste constante ; expliquer pourquoi il en est ainsi.

48) On se place en régime établi. Mesurer la période des oscillations, en déduire la valeur numérique de la pulsation correspondante et comparer celle-ci à la valeur numérique de ω_0 . Commenter.

49) on donne à G la valeur $G_2 = 10$ et on observe la tension V_1 représentée sur la figure 8. Commenter de manière précise la forme du graphe. Le régime transitoire existe-t-il toujours?

50) Mesurer la période des oscillations en régime établi. Est-elle très différent de celle mesurée en question 48. Pourquoi ?

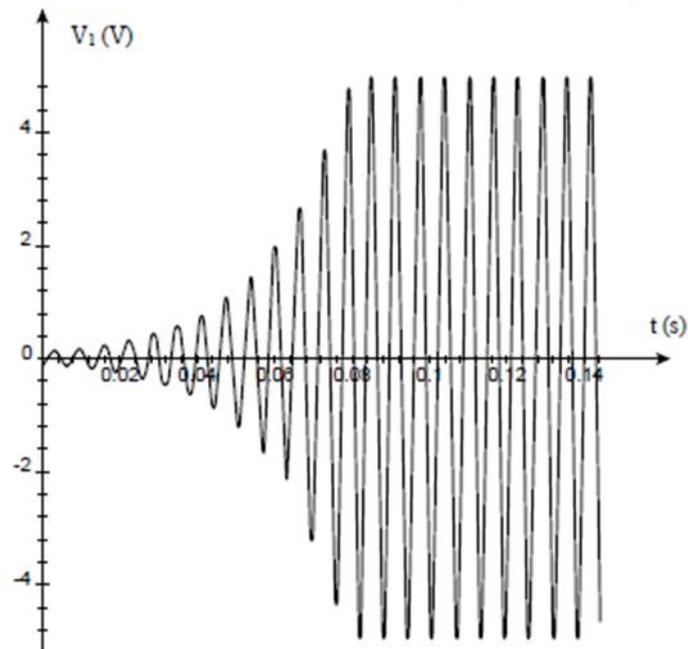


Figure 7. $G_1 = 3,1$

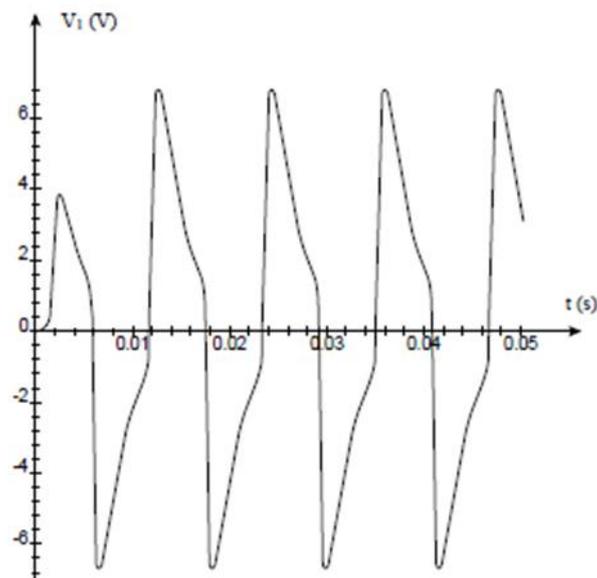
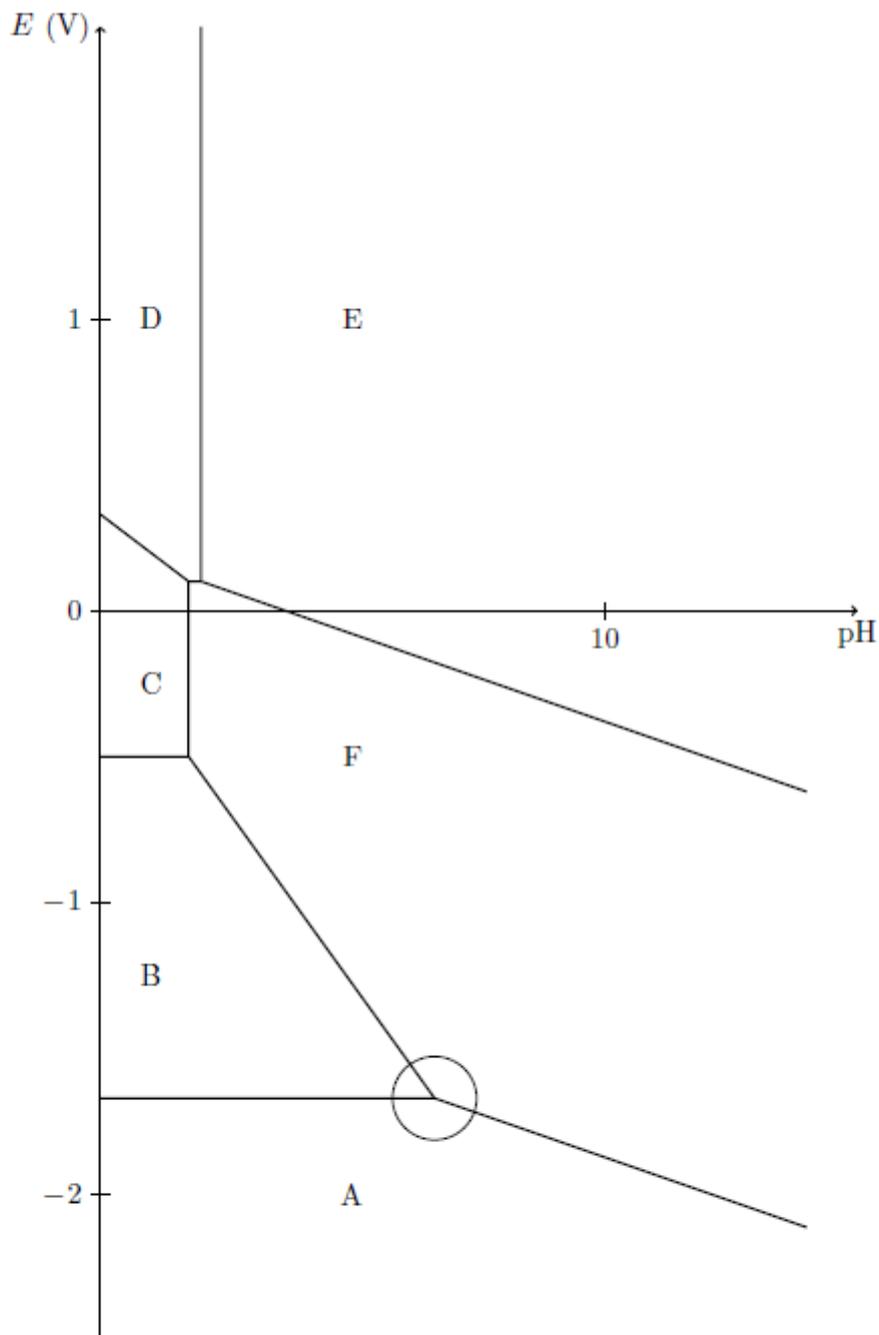


Figure 8. $G_2 = 10$

Nom :

Annexe 1

Diagramme potentiel-pH de l'uranium pour $C_{\text{tracé}} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$