Devoir surveillé 4

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Il est proposé à titre indicatif la répartition suivante des points :
- Partie I : 50 %
- Partie II : 40 %
- Partie III : 10 %

Les trois parties sont indépendantes.

I) Orage et foudre

I.1) Préambule

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, de rayon $R = 6370km$, forment un gigantesque condensateur terrestre (figure 1), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ 100 à 120 V.m^{-1}.

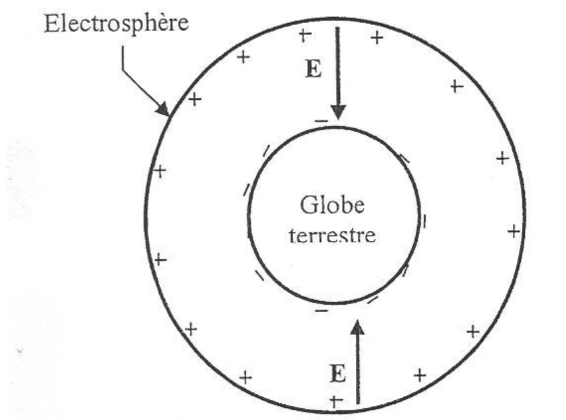

Figure 1. Direction du champ électrique par beau temps

Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère et le globe terrestre, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ 80 km.

L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\vec{j}$ tendant à décharger le condensateur.

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus (figure 2) de couleur sombre. Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont respectivement à environ 2 km et 15 km d'altitude. Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

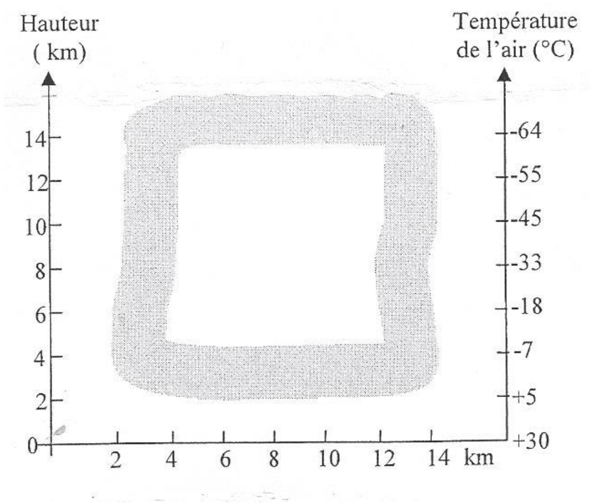

Figure 2.Cumulo-nimbus

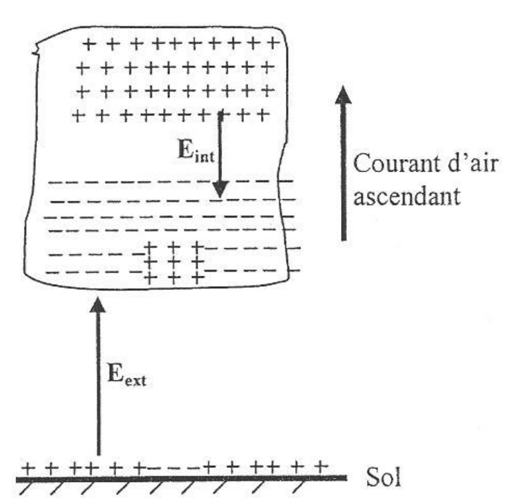

Figure 3. Dipôles électriques

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui produit la création de charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Tandis que les gouttes d'eau chargées négativement s'établissent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage.
Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (figure 3) :
- Un dipôle interne généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$ devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe $\overrightarrow{E_{ext}}$ atteint des conditions critiques de l'ordre de 20 kV.m^{-1}, il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.

I.2) Etude d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique à air (figure 4), dont la permittivité diélectrique est assimilable à celle du vide ε_0, est formé de deux armatures concentriques, de rayon R_1 et R_2, avec $R_1 < R_2$.
L'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge totale Q uniformément répartie en surface.
L'armature extérieure porte la charge totale $-Q$ uniformément répartie en surface.
On travaillera ici dans la base classique des coordonnées sphériques $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

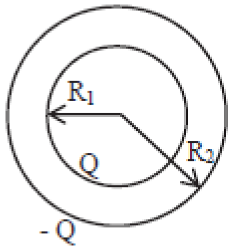

Figure 4. Condensateur sphérique

1) Définir les conditions d'applications de l'ARQS.
2) Enoncer le théorème de Gauss. De quelle équation de Maxwell découle-t-il ?
3) Par des arguments clairs et précis d'invariance et de symétrie, justifier qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme : $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{e_r}$
4) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures, en fonction de r, Q et ε_0.
5) En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux armatures en fonction de Q, R_1, R_2 et ε_0.
6) En déduire l'expression de la capacité C de ce condensateur sphérique en fonction de R_1, R_2 et ε_0.
7) Le diélectrique n'est pas parfait. Il possède une résistivité électrique certes grande mais finie. Il circule alors un courant de densité volumique $\overrightarrow{j_V}$ dans tout l'espace inter-conducteur. Faire un dessin montrant l'allure et le sens des lignes de courant dans le cas où $Q > 0$.

I.3) Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux questions suivantes :

8) Expliquer le sens du champ électrique dans l'électrosphère.

9) Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.

10) Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie électrique stockée en permanence et par beau temps dans l'électrosphère ?

11) Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?

12) Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant l'arrivée de la foudre ?

13) Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant $I = 50000 A$ et d'une durée de 10 ms ? Dans le cadre des énergies renouvelables, vous parait-il judicieux de vouloir récupérer cette énergie ou non ? Une argumentation de quelques mots est attendue. On rappelle qu'une tranche de centrale nucléaire génère en moyenne une puissance de 1 GW.

I.4) - Protection contre la foudre et prise de terre

Il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers.

Une prise de terre (figure 5) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a, et de rayon extérieur R_b. On note $\gamma_{\text{mét}}$, la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_{sol}.

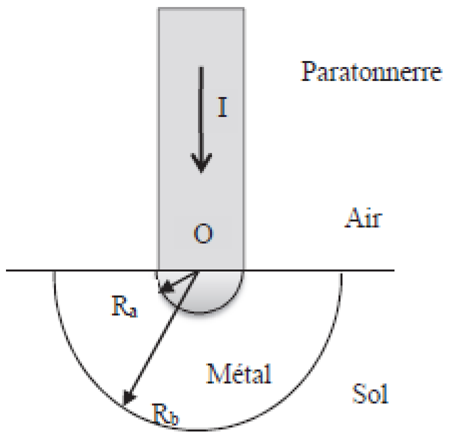

Figure 5. Modèle simplifié d'une prise de terre

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques $R_{métal}$ et R_{sol}, l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b, l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini.

Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant.

On suppose que le courant, qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques.

14) Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$.

15) Donner l'expression de la densité de courant $j(r)$ en fonction de I et de r.

16) Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.

17) En déduire en fonction de I, r et γ_{sol}, l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol. On supposera que $V=0$ loin du point O.

18) Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.

On appelle R_h, la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de a.

Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée : I_{max}), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

Trouver une relation entre D, a, R_h, I, I_{max} et γ_{sol}.

19) En supposant $D >> a$, exprimer D en fonction de a, R_h, I, I_{max} et γ_{sol}.

20) Application numérique : évaluer D pour $I = 5,0.10^4 A$.

21) Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux, ...) ou les petits animaux (lapins, renards, ...) ?

On considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique γ, comprise entre les rayons R_{int} et R_{ext} et parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r+dr$.

22) Exprimer en fonction de γ, r et dr, la résistance élémentaire dR_C d'une coque hémisphérique élémentaire.

23) En déduire en fonction de γ, R_{int} et R_{ext}, la résistance totale R_C de la coque hémisphérique.

24) Donner l'expression de la résistance globale, notée R_{glob} de la prise de terre en fonction de γ_{met}, γ_{sol}, R_a et R_b.

25) Application numérique : évaluer R_{glob} pour $R_a = 1,0cm$, $R_b = 35cm$, $\gamma_{met} = 6,0S.m^{-1}$.

26) La législation en terme de sécurité électrique impose que $R_{glob} < 25\Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

<u>**Données**</u>

Constantes physiques universelles

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9} F.m^{-1}$

Physique du sol et du corps humain

Conductivité électrique du sol : $\gamma_{sol} = 1,0.10^{-2} S.m^{-1}$

Résistance électrique entre deux pieds d'un homme : $R_h = 2,5\ k\Omega$

Longueur d'un pas humain : $a = 1,0m$

Courant d'électrocution d'un être humain : $I_{max} = 25mA$

Surface d'une sphère de rayon r : $S_{sphère} = 4\pi r^2$

II) Utilisation de solénoïde

II.1) Champ magnétique créé par un tore et passage au solénoïde infini

27) Enoncer le théorème d'Ampère. On veillera à expliquer soigneusement la signification des différents termes qui apparaissent dans cet énoncé.

Quelle est l'équation de Maxwell qui permet de démontrer ce théorème ? Ecrire cette équation. Commenter.

On désire dans les questions qui suivent, retrouver l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini à partir de l'étude d'un tore.

Un tore (figure 6) est engendré par la rotation d'une surface plane S autour d'un axe (Oz). Un fil conducteur est régulièrement enroulé sur le tore et forme une bobine de N spires parcourues par un courant I.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$. Un point quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées (r,θ,z). Soit R_1 le rayon intérieur du tore et R_2 le rayon extérieur.

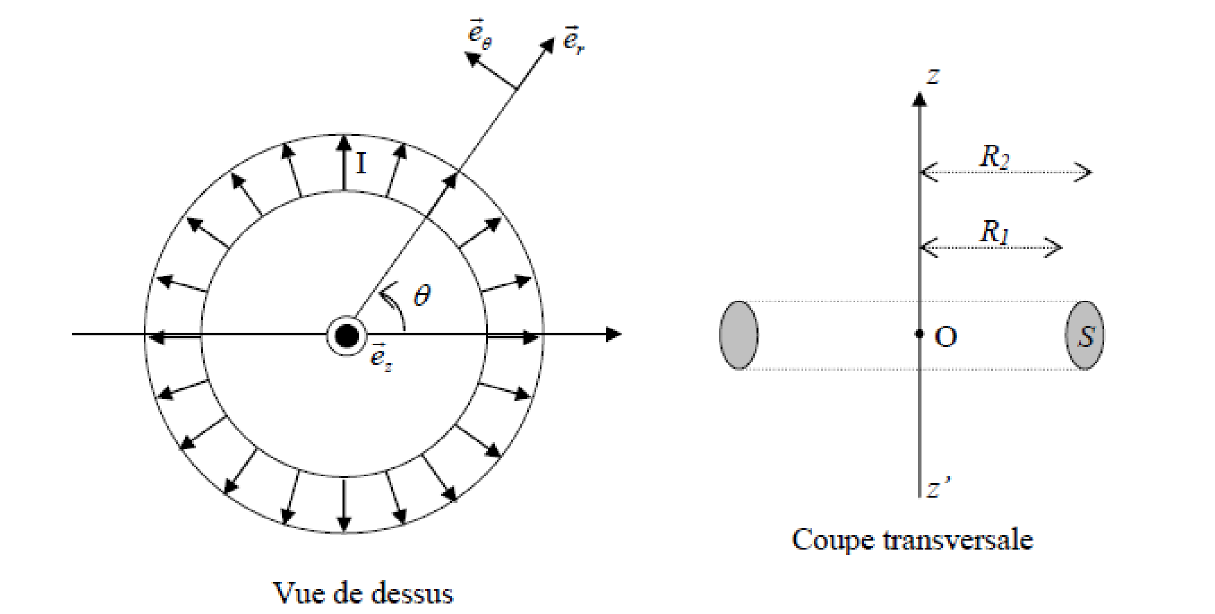

Figure 6. Géométrie du tore

28) Etudier les symétries et invariances de la distribution de courant. En déduire que le champ magnétique se met sous la forme $\vec{B}=B(r,z)\overrightarrow{e_\theta}$ où $B(r,z)$ est une fonction qui ne dépend que des variables d'espace r et z.

29) En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z). On distinguera les deux cas où le point M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du tore.

30) En remarquant que le tore précédent se comporte comme un solénoïde infini lorsque son rayon tend vers l'infini, justifier l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini en tout point de l'espace.

II.2) Inductance d'un solénoïde

On désire dans cette partie déterminer l'inductance d'un solénoïde de deux manières différentes.

On considère un solénoïde de longueur l constitué de N spires régulièrement espacées, supposées jointives, de section S. Sa longueur l est très grande devant ses dimensions latérales et on peut considérer que le solénoïde se comporte comme un solénoïde infini.
Les spires du solénoïde sont parcourues par un courant d'intensité i.

31) En précisant clairement les orientations choisies pour le calcul, déterminer le flux Φ_0 du champ magnétique $\vec{B}$ calculé précédemment à travers une spire du solénoïde. En déduire le flux propre propre Φ du champ magnétique à travers le solénoïde.
En déduire l'inductance L du solénoïde en fonction de μ_0, l, N et S.

32) Quelle propriété possède le flux du champ magnétique ? Dans quelle équation de Maxwell la retrouve-t-on ? Comparer avec le flux calculé précédemment.

33) Soit un solénoïde d'inductance L et parcouru par un courant i variable au cours du temps.
En négligeant la résistance du solénoïde et en utilisant la convention récepteur que l'on précisera, rappeler l'expression de la tension u_L aux bornes du solénoïde précédent. On exprimera u_L en fonction de L et i.

34) En écrivant la puissance électrique instantanée mise en jeu dans la bobine, en déduire l'expression, en fonction de L et i, de l'énergie magnétique E_L accumulée par le solénoïde.

35) En considérant l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique, déterminer une autre expression de l'énergie magnétique E_L accumulée par le solénoïde. En déduire l'expression de l'inductance L du solénoïde en fonction de μ_0, l, N et S.

II.3) Régimes transitoires entre deux solénoïdes couplés

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier l'établissement de l'intensité dans un circuit série comportant une bobine et une résistance (circuit RL) puis dans deux circuits RL couplés.
Soit un circuit RL (figure 7) comportant un solénoïde d'inductance L supposée constante et une résistance R associées en série. On alimente ce circuit avec un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E.

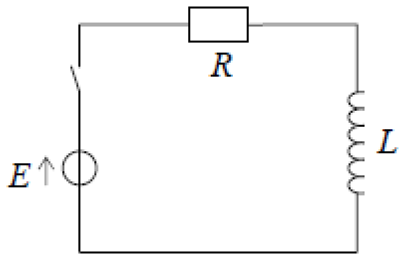

Figure 7. Circuit RL

Nous supposons qu'il n'existe aucune autre source de champ magnétique que le solénoïde.
L'intensité $i(t)$ est initialement nulle pour $t<0$. A l'instant $t=0$, l'interrupteur est fermé.

36) Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ dans le circuit en fonction du temps t, de E, L et R.
Quelle est la valeur de l'intensité i_∞ au bout d'un temps infini ?

Soit deux circuits couplés :
- Le premier circuit comporte un solénoïde d'inductance L, une résistance R, un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E et un interrupteur disposés en série. Soit $i_1(t)$ l'intensité du courant qui parcourt ce circuit.
- Le deuxième circuit comporte un solénoïde d'inductance L et une résistance R en série. Soit $i_2(t)$ l'intensité du courant qui parcourt ce circuit.

Les sens choisis pour les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont mentionnés sur le schéma ci-dessous.

Pour simplifier les calculs, on suppose que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif.

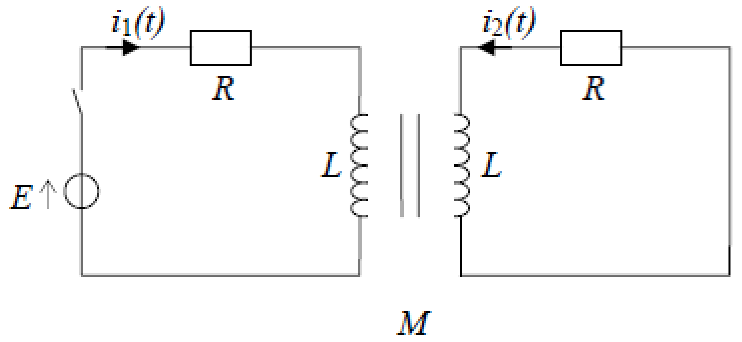

Figure 8. Circuits couplés

37) En utilisant la loi des mailles, écrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé.

38) En effectuant le changement de variables $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$, en déduire deux équations différentielles découplées en I et J .

39) L'interrupteur est initialement ouvert (pour $t < 0$). A un instant choisi comme origine du temps ($t = 0$), l'interrupteur est fermé.

En posant $\tau_1 = \dfrac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \dfrac{L-M}{R}$, déterminer les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour $t > 0$, dans le cas où M est inférieur à L. Donner l'allure des représentations graphiques de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.

II.4) Champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

On considère un solénoïde circulaire (figure 9) de rayon R comportant n spires jointives par unité de longueur. Sa longueur est très grande devant ses dimensions latérales et on peut considérer que le solénoïde se comporte comme un solénoïde infini.

Les spires du solénoïde sont parcourues par une intensité sinusoïdale de pulsation ω : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Un point quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, z).

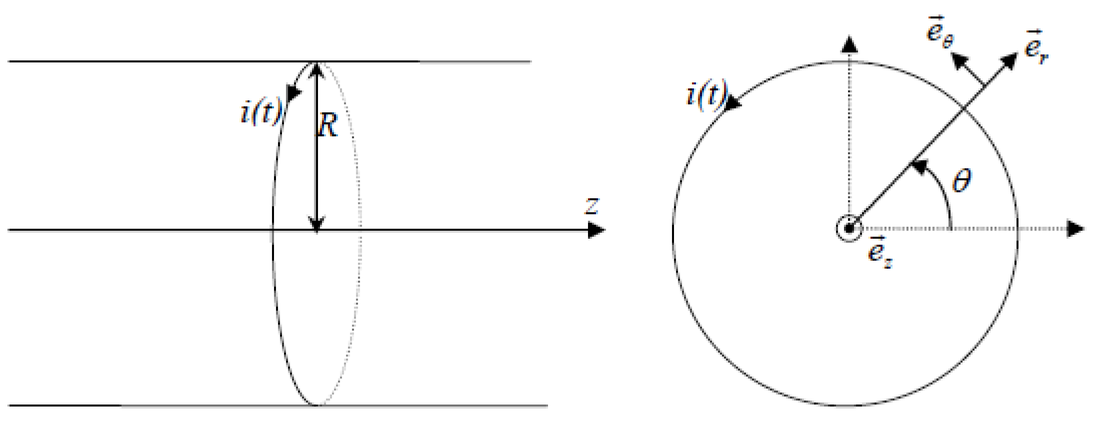

Figure 9. Géométrie du solénoïde

40) Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, qu'un champ électrique $\vec{E}$ est nécessairement créé par le solénoïde.

41) En admettant que le champ électrique est orthoradial (dirigé suivant le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$) et ne dépend que de r, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé par le solénoïde en tout point M de l'espace en fonction de μ_0, n, I_0, ω, r et t.

Un cylindre métallique de conductivité γ, de rayon a et longueur h très grande par rapport à a est placé à l'intérieur du solénoïde (figure 9). L'axe du solénoïde et du cylindre sont confondus.

On fait l'hypothèse que l'introduction du conducteur cylindrique ne modifie pas les champs électrique et magnétique créés à l'intérieur du solénoïde en l'absence du cylindre conducteur.

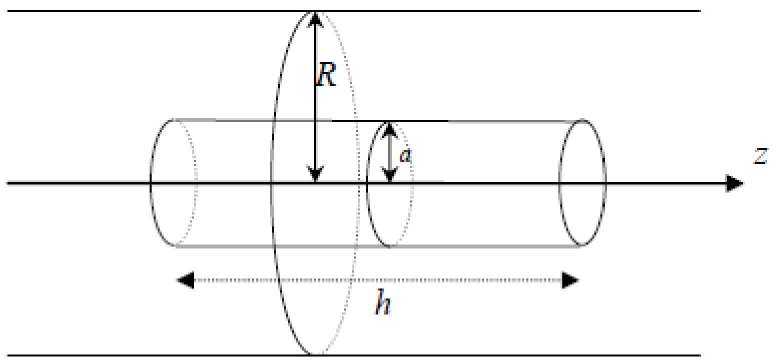

Figure 9. Solénoïde avec conducteur cylindrique

42) En appliquant la loi d'Ohm locale, déterminer la densité de courant volumique $\vec{j}$ qui apparaît dans le cylindre conducteur en fonction de μ_0, n, I_0, γ, ω, r et t.

43) Déterminer l'expression dP_J de la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans un volume élémentaire $d\tau = r dr d\theta dz$ du cylindre. On exprimera dP_J en fonction de $d\tau$, μ_0, n, I_0, γ, ω, r et t.

Par intégration de l'expression précédente de dP_J, déterminer la puissance instantanée P_J dissipée par effet Joule dans le cylindre. On exprimera P_J en fonction de h, a, μ_0, n, I_0, γ, ω et t.

Déterminer la moyenne temporelle $\langle P_J \rangle$ de la puissance instantanée P_J en fonction de h, a, μ_0, n, I_0, γ et ω.

44) Citer une application classique du phénomène physique ainsi mis en évidence dans la question précédente.

<u>Données</u>

Soit un solénoïde de section quelconque, infiniment long et comportant n spires par unité de longueur. Dans le cadre de l'ARQS, lorsque les spires sont parcourues par un courant d'intensité I, le solénoïde crée un champ magnétique nul en tout point extérieur au solénoïde et égal à $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}$ en tout point intérieur au solénoïde (μ_0 désigne la perméabilité du vide et $\vec{e}$ un vecteur unitaire colinéaire à l'axe du solénoïde).

Rotationnel d'un vecteur $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

III) L'ammoniac en solution aqueuse

III.1) Détermination du pK_A

On étudie une solution d'ammoniac. On mesure la conductivité de cette solution de concentration c = $8{,}0.10^{-4}$ mol.L^{-1} et l'on trouve $\sigma = 2{,}87.10^{-3} S.m^{-1}$.

45) Ecrire la réaction de l'ammoniac avec l'eau. La solution est-elle acide ou basique ?

46) Rappeler le principe de mesure de la conductivité par conductimètre.

47) Donner l'expression générale de la conductivité σ de la solution en introduisant les conductivités ioniques des différents ions à 298 K.

48) En déduire la valeur du pH de la solution.

49) Calculer le pKa du couple $NH_{4(aq)}^{+} / NH_{3(aq)}$.

III.2) Dosage pH-métrique

On se propose de réaliser le dosage de 100 mL d'une solution aqueuse de NH_3 de concentration c par une solution d'acide chlorhydrique de concentration 0,1 mol.L^{-1}. Le volume équivalent, noté v_{eq}, est de 8 mL.

50) Quelles sont les électrodes nécessaires à ce dosage ?

51) Ecrire le bilan de la réaction qui a lieu avant l'équivalence. Calculer la concentration c de la solution utilisée.

52) Quel indicateur coloré peut-on utiliser pour suivre le dosage par colorimétrie ? Justifier la réponse en calculant le pH de la solution obtenue à l'équivalence.

<u>**Données**</u>

Conductivités molaires ioniques

	H_3O^+	HO^-	NH_4^+	Cl^-
$\lambda^0 \quad en\, S.m^2.\text{mol}^{-1}$	$3{,}5.10^{-2}$	$2{,}0.10^{-2}$	$0{,}74.10^{-2}$	$0{,}76.10^{-2}$

pK_a à 298 K

$pK_a\left(NH_4^+ / NH_3\right) = 9{,}25$

Zones de virages de quelques indicateurs colorés

- phénolphtaléine : 8,3-10,0
- bleu de bromothymol : 6,0-7,3
- rouge de méthyle : 4,2-6,3
- hélianthine : 3,4-4,4