

Devoir surveillé 6

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La propagation de l'onde lumineuse s'effectue dans un milieu transparent, diélectrique, linéaire, homogène et isotrope.

La vitesse de la lumière dans le vide est notée $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Une source lumineuse ponctuelle située en S émet, de manière pulsée, des trains d'ondes lumineuses supposées de même pulsation ω . Dans le modèle scalaire de la lumière, la fonction de l'onde monochromatique est caractérisée en un point M et à l'instant t par le signal lumineux ou vibration lumineuse : $s(M, t) = a \cos(\omega t - \varphi(M, t))$, où a est l'amplitude supposée constante de l'onde et $\varphi(M, t)$ son retard de phase en M et à l'instant t par rapport au point de référence S .

Le modèle des trains d'ondes suppose que la phase à la source φ_S reste constante pendant des intervalles de temps de durée constante τ_c entre lesquels elle change aléatoirement de valeur. L'onde émise durant cet intervalle de temps appelé temps de cohérence est nommée « train d'onde ». Le train d'onde est ainsi limité dans le temps et se propage dans le vide à la célérité c . La phase de l'onde φ_S à la source S prend une nouvelle valeur aléatoire à chaque nouveau train d'onde.

Première partie : Rayon lumineux

La lumière se propage de S à M le long d'un rayon lumineux avec pour vitesse au point P :

$v(P) = \frac{c}{n(P)}$ où $n(P)$ est l'indice de réfraction du milieu en P ; par définition, le chemin optique

(SM) entre les points S et M du rayon lumineux est : $(SM) = \int_S^M n(P) dl(P)$. L'élément d'arc de la

courbe suivie par la lumière est noté $dl(P)$; il est défini en P et est parcouru par la lumière à la vitesse de propagation $v(P)$ pendant la durée dt .

L'onde se propage sans déformation, le signal $s(M, t)$ reproduit le signal de la source avec un retard $\tau(M)$.

1) Relier le chemin optique (SM) à la durée de propagation du signal $\tau(M)$. Conclure quant à l'interprétation du chemin optique.

2) Dans le domaine visible, pour une longueur d'onde moyenne dans le vide λ_m de l'ordre de 600 nm, calculer l'ordre de grandeur de la pulsation ω_m du signal lumineux.

3) Etablir l'expression du retard de phase $\varphi_{P \rightarrow M} = \varphi(M, t) - \varphi(P, t)$ lié à la propagation entre P et M , en fonction du chemin optique (PM) et de la longueur d'onde λ_0 de l'onde étudiée dans le vide.

4) Définir une surface d'onde. Justifier le caractère d'onde sphérique associé au signal lorsque celui-ci se propage dans un milieu d'indice n constant. Énoncer le théorème de Malus.

5) Quel instrument d'optique permet d'obtenir une onde plane à partir d'une source ponctuelle ? Illustrer votre réponse à l'aide d'un schéma faisant apparaître les surfaces d'onde.

L'intensité lumineuse $I(M)$ est mesurée par un détecteur quadratique placé en M sensible à la valeur moyenne temporelle de $s^2(M, t)$. Elle est conventionnellement définie au point M (à une constante multiplicative près) par : $I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$.

Cette moyenne temporelle est effectuée sur un temps de réponse τ_R du détecteur toujours très grand devant les temps de cohérence temporelle des sources supposés identiques à τ_C . Ce temps de cohérence est la durée moyenne de passage des trains d'ondes en un point donné de l'espace.

6) Donner des ordres de grandeurs de temps de cohérence de sources usuelles. Dans le cas du laser de longueur d'onde moyenne λ_m , relier le temps de cohérence à son étendue spectrale $\Delta\lambda$. Faire l'application numérique.

Deuxième partie : Interférences entre deux sources ponctuelles

L'intensité lumineuse $I(M)$ résulte de la superposition en M de deux ondes issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de longueurs d'onde dans le vide différentes λ_1 et λ_2 . Elles sont notées respectivement : $s_1(M,t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M,t))$ et $s_2(M,t) = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M,t))$.

7) Exprimer l'intensité lumineuse $I(M)$ en fonction des intensités I_1 et I_2 de chacune des ondes, de leurs pulsations respectives ω_1 et ω_2 et du déphasage $\phi_{2/1}(M,t) = \varphi_2(M,t) - \varphi_1(M,t)$ de l'onde issue de S_2 par rapport à l'onde issue de S_1 . Identifier le terme d'interférences.

8) Que vaut l'intensité lumineuse $I(M)$ pour des ondes incohérentes ?

L'intensité lumineuse $I(M)$ résulte maintenant de la superposition en M de deux ondes issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de même longueur d'onde dans le vide λ_0 . Elles sont notées respectivement : $s_1(M,t) = a_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1(M,t))$ et $s_2(M,t) = a_2 \cos(\omega_0 t - \varphi_2(M,t))$.

9) Déterminer le déphasage $\phi_{2/1}(M,t) = \varphi_2(M,t) - \varphi_1(M,t)$ en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 , de la différence de marche notée $\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$ et des phases φ_{S_1} et φ_{S_2} des signaux émis aux points sources S_1 et S_2 .

PARTIE III - D'AUTRES PLANETES HABITABLES ?

Alors que la Terre est actuellement la seule planète connue pour abriter la vie, les astrophysiciens ont découvert une exoplanète bleue, nommée Isis.

On se propose dans cette partie d'analyser une technique de détection d'exoplanètes faisant appel à l'interférométrie puis d'examiner l'atmosphère d'Isis pour déterminer si, du fait de sa couleur bleue, cela en fait une bonne candidate pour abriter la vie.

III.A. La recherche d'exoplanètes

Comme notre planète, Isis orbite autour d'une étoile.

L'observation du couple étoile – exoplanète est réalisée à une longueur d'onde λ (généralement située dans l'infrarouge).

Dans un premier temps, on considère uniquement l'étoile. On l'assimile à une source plane monochromatique de longueur d'onde λ se propageant suivant l'axe horizontal (Oz) à la célérité c .

Perpendiculairement à cet axe, on dispose un écran opaque percé de deux trous d'Young écartés d'une distance a . On note S_1 et S_2 les centres des deux trous d'Young (voir figure 12 ci-dessous).

L'observation est effectuée sur un écran situé dans le plan focal d'une lentille convergente de focale f' .

On s'intéresse à l'onde lumineuse $s(M, t)$ en un point $M(x, y)$ de l'écran, résultante de la superposition des ondes provenant de S_1 et S_2 . On note A l'amplitude de ces deux ondes et on suppose que leur déphasage à l'origine est nul.

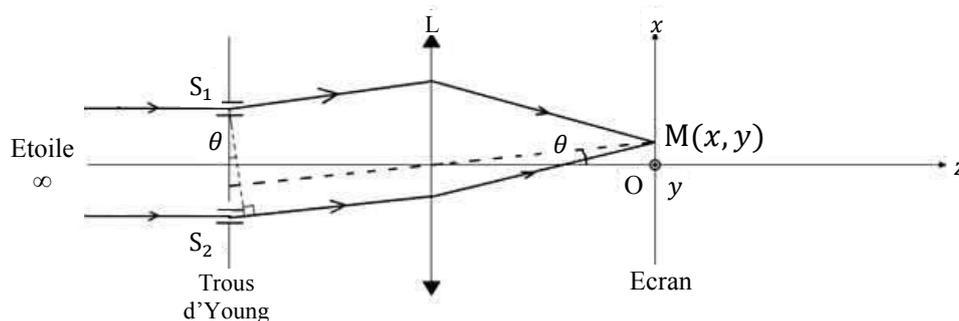


Figure 12 - Dispositif des trous d'Young

47. On rappelle que les capteurs optiques quadratiques fournissent un signal proportionnel à l'intensité lumineuse, c'est-à-dire proportionnel à la moyenne du carré du signal notée $\langle s^2(M, t) \rangle$.

On note $I_0 = \frac{A^2}{2}$ l'intensité lumineuse de chacune des ondes.

On donne la formule de linéarisation suivante :

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} \times (\cos(a - b) + \cos(a + b)).$$

Exprimer l'intensité lumineuse $I(M, t) = \langle s^2(M, t) \rangle$ au point M en fonction de I_0 et de la différence de marche δ entre les deux chemins optiques.

48. Rappeler les conditions principales pour que le phénomène d'interférences apparaisse. Ces conditions sont-elles réunies ici ?

49. Déterminer la valeur du contraste.

L'utilisation d'une lentille impose d'être dans les conditions de Gauss.

50. Enoncer les conditions de Gauss.

51. On suppose les conditions de Gauss vérifiées. L'angle θ défini sur le schéma de la figure 12 est tel que :

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta .$$

L'indice optique de l'air est pris égal à 1.

Montrer que la différence de marche a pour expression :

$$\delta = \frac{a \times x}{f'}$$

En déduire l'expression de l'interfrange i .

52. Quelle est la forme des franges observées ? Sont-elles localisées ? Justifier.

On considère dans un second temps l'étoile et son exoplanète comme deux sources incohérentes planes monochromatiques de longueur d'onde λ se propageant suivant l'axe (Oz) à la célérité c .

53. Pour quelle raison ce dispositif ne permet-il pas de déterminer la présence d'une exoplanète ?

Pour mettre en évidence la présence d'une exoplanète, on utilise deux télescopes. En recombinaison les faisceaux issus des deux télescopes sur une recombinaison optique située au milieu des deux télescopes, ces faisceaux seront en phase et l'on obtiendra des interférences constructives. Ainsi dans l'interférométrie classique, les signaux des deux télescopes se combinent pour construire une frange centrale d'intensité maximale sur la ligne de visée, c'est-à-dire dans la direction de l'étoile observée. Cependant à l'aide d'un principe ingénieux, l'interféromètre de Bracewell (voir figure 13 ci-dessous), il est possible d'introduire sur le faisceau de l'un des télescopes un déphaseur achromatique de π , de sorte que les interférences deviennent destructives dans la direction de l'étoile. On « éteint » ainsi le flux de l'étoile : c'est ce qu'on appelle l'interférométrie à frange noire.

Dans la direction de la planète qui fait un angle α par rapport à la direction de l'étoile, on introduit une différence de marche supplémentaire de $D \times \sin \alpha$ où D est la distance entre les deux télescopes. Si on adapte D , on peut s'arranger pour qu'à la longueur d'onde d'observation, la différence de marche supplémentaire compense exactement le déphasage π introduit par le déphaseur. On réalise alors dans la direction de la planète des interférences constructives.

Toute source sur l'axe (ici l'étoile), donc sur la frange sombre, est éteinte de manière très efficace. Une source hors-axe (ici l'exoplanète), sur une frange claire, n'est pas ou peu affectée et est donc détectée avec un bien meilleur contraste.

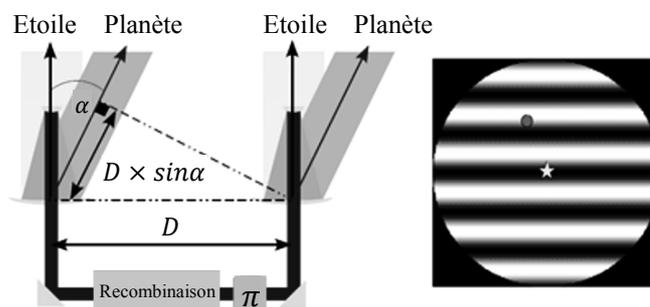


Figure 13 - Principe de fonctionnement de l'interféromètre de Bracewell

Pour comprendre le principe de fonctionnement de l'interféromètre de Bracewell, on se ramène à l'expérience des trous d'Young en considérant la direction de l'étoile suivant l'axe (Oz) et la direction de la planète inclinée d'un angle α par rapport à la direction de l'étoile. Un déphaseur est introduit avant la lentille et la recombinaison est associée au point O de l'écran (cf. figure 14).

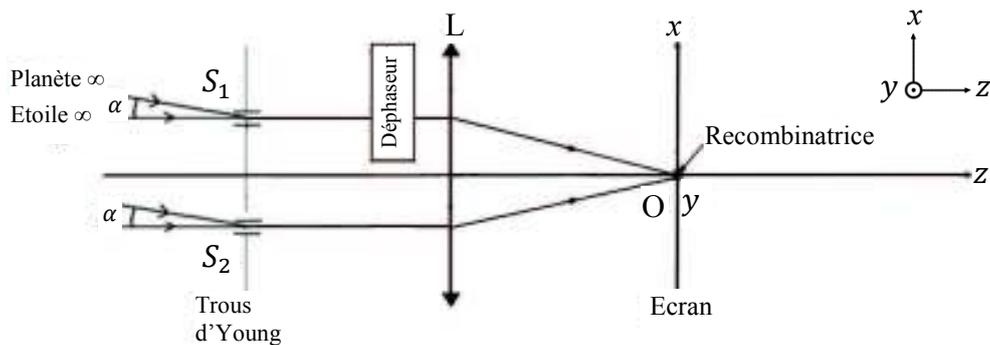


Figure 14 - Dispositif des trous d'Young pour une planète vue sous un angle α

54. Lorsque l'interféromètre de Bracewell pointe en direction de l'étoile, quelle est l'expression de l'intensité lumineuse due uniquement à l'étoile en un point de la recombinaison ? Quelle est la valeur de l'ordre d'interférences dans un tel cas ?

55. Lorsque l'interféromètre de Bracewell pointe en direction de l'étoile, quelle est l'expression de l'intensité lumineuse due uniquement à l'exoplanète en un point de la recombinaison pour un réglage optimal ?

56. Justifier que l'interféromètre de Bracewell permet de mettre en évidence la présence d'une exoplanète.

III.B. Résolution du problème : Isis est-elle habitable ?

Lorsqu'on peut observer directement une planète, il est possible d'en déduire la composition de son atmosphère. Pour une exoplanète trop proche de son étoile, de telles observations sont impossibles. On a alors recours à la méthode du transit. Lorsqu'une planète passe devant son étoile, elle la cache en partie. Si la planète possède une atmosphère, alors une petite partie du rayonnement de l'étoile traverse cette atmosphère avant de nous parvenir.

Récemment, les astrophysiciens ont découvert une exoplanète nommée Isis dont la couleur bleue depuis l'espace rappelle celle de la Terre vue de l'espace.

Lors de son passage devant l'étoile, la luminosité ne change pratiquement pas dans le vert ni dans le rouge, mais un déficit dans le bleu est constaté. Cela signifie principalement que l'atmosphère de l'exoplanète émet de la lumière bleue. Grâce au spectrographe STIS (Space Telescope Imaging Spectrograph) embarqué à bord du télescope Hubble, les astrophysiciens ont pu obtenir le spectre d'absorption d'Isis. Ce spectre, qui devrait être un spectre d'absorption de raies, présente en réalité une bande sombre. Cet élargissement des raies est le signe que les collisions et les chocs sont nombreux entre les molécules de l'atmosphère de l'exoplanète.

Pour la science, avril 2014

On se propose de déterminer si Isis peut être classée parmi les exoplanètes habitables.

III.B.1. Etude préliminaire : déviation d'un rayon lumineux dans un prisme

On s'intéresse à un rayon lumineux monochromatique incident arrivant sur la face EB du prisme (cf. document réponse). On note n ($n > 1$) l'indice optique du prisme et $n_a = 1,000$, l'indice optique de l'air. On appelle i l'angle orienté d'incidence sur la face avant du prisme et r l'angle de réfraction sur cette même face, ces deux angles étant repérés par rapport à la normale à cette face.

57. Rappeler les lois de Descartes relatives à la réfraction au niveau de la face EB du prisme en utilisant les notations définies précédemment.

On suppose que le rayon incident se propage dans le prisme et en ressort par la face EC.

58. Sur le schéma fourni sur le document réponse, compléter le tracé du chemin du rayon lumineux à travers le prisme d'angle au sommet A . On fera apparaître :

- l'angle orienté i ,
- l'angle orienté r ,
- l'angle d'incidence orienté r' que fait ensuite le rayon lumineux incident sur la face EC,
- l'angle de réfraction orienté i' que fait le rayon lumineux réfracté sur la face EC
- et l'angle D , appelé angle de déviation, l'angle orienté entre le rayon incident sur la face EB et le rayon réfracté en sortie du prisme sur la face EC.

On veillera à respecter les proportions entre l'angle incident et l'angle réfracté pour les deux réfractions.

59. Quelle relation existe-t-il entre les angles A , r et r' ? En déduire la condition sur $\sin(i)$ en fonction de A et n , pour que le rayon lumineux ressorte par la face EC.

III.B.2. Isis, une planète habitable ?

Description du problème :

On positionne désormais ce prisme sur la plate-forme d'un goniomètre, appareil qui, on le rappelle, sert à effectuer des mesures d'angles. A l'aide du goniomètre, il est possible de mesurer l'angle au sommet A du prisme et l'angle de déviation minimum D_m (angle de déviation pour lequel $i = i'$). L'indice optique du prisme se déduit alors de la relation :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

En éclairant le prisme avec une lampe à mercure dont on connaît les longueurs d'onde des raies d'émission, on peut vérifier que l'indice optique du prisme dépend de la longueur d'onde λ de la raie : cette loi est appelée loi de Cauchy. Pour vérifier cette loi, on a tracé en laboratoire la courbe donnée sur le document réponse.

Une fois le goniomètre étalonné, il est ensuite possible de mesurer les longueurs d'onde (en nm) des raies colorées présentes dans le spectre d'émission de différentes entités chimiques :

Dihydrogène (H_2) : 410,0 – 434,0 – 486,1 – 656,3

Dioxygène (O_2) : 627,7 – 686,7 – 759,4

Fer (Fe) : 430,8 – 438,3 – 466,8 – 495,8 – 516,9 – 527,0

Sodium (Na) : 589,0 – 589,6

Magnésium (Mg) : 516,7 – 517,3 – 518,4.

On peut prédire que si ce goniomètre remplaçait le spectrographe STIS à bord d'Hubble, la mesure du minimum de déviation nous permettrait d'obtenir la valeur de l'indice optique au centre de la bande d'absorption : $n = 1,722$.

60. A l'aide de la description du problème et du document réponse, déterminer si la couleur bleue de l'atmosphère d'Isis fait d'elle une planète habitable. Une réponse argumentée est attendue.

Aide aux calculs : $\frac{1}{\sqrt{2,9}} = 0,58722022$ (résultat brut obtenu à la calculatrice).

Fin de l'énoncé

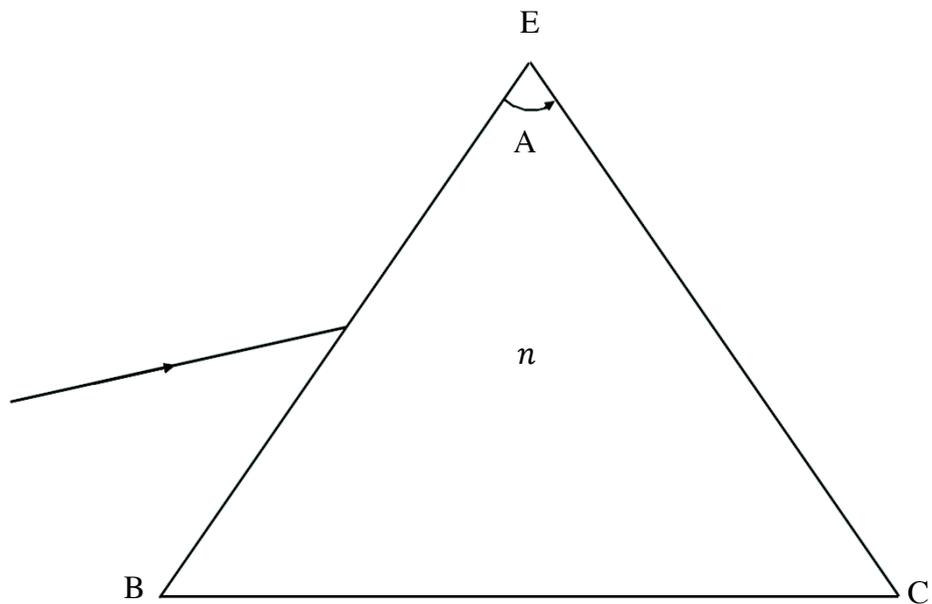
NE RIEN ÉCRIRE

DANS LA PARTIE BARRÉE

DOCUMENT REPOSE A RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1

(pour la question 58)



ANNEXE 2

(pour la question 60)

Vérification de la loi de Cauchy

