4 Exercices : Rappel sur les systèmes de coordonnées

1) Comment définit-on la vitesse d'un point matériel M dans le repère $\Re\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$?

2) Comment définit-on la vitesse d'un point matériel M dans le repère $\Re_{cyl}\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$? En déduire l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.

3) Donner trois relations reliant les paramètres x, y, r et θ des systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques.

4) Dans une base cartésienne, le point M parcourt un carré de côté a. Quelle est la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour ? On posera un repère adapté (faire un dessin) et on utilisera des intégrales.

5) Dans une base cylindrique, le point M parcourt un cercle de rayon a. Quelle sera la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour (utiliser une intégrale) ? Comparer au périmètre du cercle.

6) Même question en coordonnées sphériques lorsque le point M parcourt un cercle de rayon a dans le plan Oxy.

5 Exercices : Surfaces et volumes élémentaires

1) Retrouver le volume d'un cube par intégration du volume élémentaire entre les abscisses $x_0 \; et \; x_0+x, y_0 \; et \; y_0+y, z_0 \; et \; z_0+z$.

2) Retrouver le volume d'un cylindre de rayon r_0 par intégration du volume élémentaire entre les abscisses $z_0 \; et \; z_0+z$.

3) Que vaut l'intégrale suivante : $\iint_{\Sigma} dS$? Quelle est la surface comprise entre deux cercles de rayons $r_0 \; et \; r_1$?

4) Retrouver le volume d'une sphère de rayon r_0 par intégration du volume élémentaire.

5) Retrouver la surface d'une sphère de rayon r_0 par intégration de la surface élémentaire.

6 Exercices : Fonctions de plusieurs variables

1) Soit la fonction f telle que $f(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi)$. Quelles sont les variables de cette fonction ? Combien y a-t-il de dérivées partielles premières et secondes ? Donner leurs expressions. Que remarque-t-on ?

2) Dans l'eau, la pression en fonction de la profondeur obéit à la loi suivante : $dP=-\mu g dz$ où μ est la masse volumique constante de l'eau, g est l'accélération de la pesanteur et l'axe Oz est ascendant. Donner l'expression de la variation de pression entre la surface (z = 0) et une profondeur H.

3) Donner les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions usuelles suivantes :

$$(1+x)^a\,;\frac{1}{1-x}\,;\frac{1}{1+x}\,;\ln(1+x)\,;e^x\,;\cos(x)\,;\sin(x)\,;\tan(x)$$

4) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0.

5) Dans la troposphère, la pression de l'air varie selon les lois :

- pour une température uniforme T_0 : $P(z) = P_0 \exp\left(-\dfrac{z}{H}\right)$ où H est une grandeur caractéristique

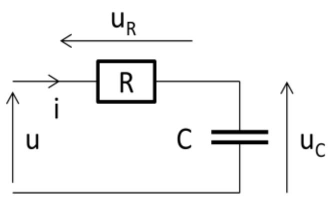
- pour une température décroissante linéairement avec l'altitude : $P(z) = P_0\left(1 - \dfrac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$ où λ est une constante.

Pour z << H, montrer que les résultats obtenus à l'aide des deux modèles précédents conduisent à une même fonction affine $P(z)$ donnant la pression en fonction de l'altitude.

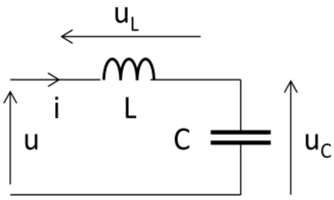
6) On donne les variations suivantes pour la pression dans l'eau : $P(z) = P_{atm} - \mu g z \quad pour \quad z \leq 0$.
Trouver la résultante des forces de pression qui s'exerce sur un barrage vertical de hauteur H et de largeur L sachant que la résultante $\overrightarrow{F_S}$ des forces de pression sur une surface élémentaire dS s'écrivent : $\overrightarrow{F_S} = P dS \vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire orienté selon la normale extérieure à la surface.

7 Exercices : Equations différentielles linéaires à coefficients constants

1) Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC. La résoudre en supposant que le condensateur est initialement déchargé. La tension appliquée en entrée est un échelon variant entre 0 et E.



2) Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC. La résoudre en supposant que le condensateur est initialement déchargé. La tension appliquée en entrée est un échelon variant entre 0 et E.



3) Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC. La résoudre en supposant que le condensateur est initialement déchargé. La tension appliquée en entrée est un échelon variant entre 0 et E.