

6 Questions de cours

- 1) Donner les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs : gradient, divergence, rotationnel et laplacien.
- 2) Démontrer le principe de conservation de la charge en unidimensionnel et l'énoncer en 3D.
- 3) Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide (nom et formulation).
- 4) Etablir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
- 5) Etablir le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.
- 6) Ecrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
- 7) Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Quelle est son origine physique ?
- 8) Définir l'approximation des régimes quasi stationnaires. On comparera une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique. Comment se simplifie les équations de Maxwell dans un conducteur ?
- 9) Comment se simplifie les équations de Maxwell dans le cadre d'un régime permanent ?
- 10) Etablir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.

7 Exercices

7.1 Calcul d'une densité de charge

Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant au champ électrique suivant :

$$\vec{E} = E_0 \frac{x}{a} \vec{u}_x \text{ pour } -a \leq x \leq a \quad ; \quad \vec{E} = E_0 \vec{u}_x \text{ pour } x > a \quad ; \quad \vec{E} = -E_0 \vec{u}_x \text{ pour } x < -a$$

7.2 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ \vec{E} à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} E_r = E_0 \frac{r}{r_0} & \text{si } r \leq r_0 & E_r = E_0 \frac{r_0}{r} & \text{si } r > r_0 \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer les lignes de champ. Comment varie \vec{E} le long d'une ligne de champ ?
- 2) Calculer $\text{div} \vec{E}$ en tout point. Pour un champ radial en coordonnées cylindriques, quelle loi de dépendant avec r permet d'assurer une divergence nulle ?

En coordonnées cylindriques : $\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r a_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$

- 3) Exprimer, par deux méthodes différentes le flux $\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}$, où Σ est un cylindre d'axe Oz , de hauteur h et de rayon r .

- 4) Si \vec{E} est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?
- 5) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

En coordonnées cylindriques : $\text{rota} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

7.3 Champ magnétostatique tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel \vec{W} défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} W_r = 0 \\ W_\theta = W_0 \frac{r}{r_0} \quad \text{si } r \leq r_0 & W_\theta = W_0 \frac{r_0}{r} \quad \text{si } r > r_0 \\ W_z = 0 \end{cases}$$

- 1) Justifier l'appellation de champ de tourbillon.
- 2) Exprimer la circulation de \vec{W} sur le cercle de centre O d'axe Oz et de rayon r.
- 3) Calculer en tout point $\text{rot}(\vec{W})$, puis vérifier le résultat du 2) par application du théorème de Stokes.
- 4) Calculer la divergence du champ en tout point.
- 5) Si le champ étudié ici est un champ magnétostatique : quelle est la distribution de courant correspondante ?

7.4 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x$

En déduire l'expression du champ magnétique. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.

7.5 Courants électriques et courants de déplacement

On se place dans un milieu ohmique de conductivité γ ($\vec{j} = \gamma \vec{E}$), en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν .

- 1) Montrer que $|\vec{j}| > |\vec{j}_D|$ pour peu que $\nu < \nu_{max}$. Exprimer ν_{max} en fonction de ϵ_0 et γ .
- 2) Application numérique :
 - dans le cas du cuivre ($\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$);
 - dans le cas de l'eau ($\gamma = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ S.m}^{-1}$).

7.6 Piège électrostatique

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{a^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

V_0 est une grandeur positive, a désigne une longueur caractéristique du problème.

- 1) Vérifier l'équation de Poisson.
- 2) Sur l'axe Ox , quelle est la loi de variation du potentiel avec l'abscisse ? Que représente la quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$? Commenter son signe et comparer à celui obtenu pour $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.
- 3) Déterminer le champ électrique à l'origine du repère. Si l'on place une particule de charge q_0 en ce point, est-elle en équilibre stable ?