7 Questions de cours

1) Donner l'équation de propagation pour le champ électrique et la démontrer dans un espace vide de charges et de courants.

2) On suppose que l'équation de propagation est vérifiée par une fonction scalaire $u(x,t)$. Donner l'équation de propagation simplifiée. Quelle est la solution générale d'une telle équation ? On donnera la définition de l'onde obtenue et on précisera bien chacun des termes entrant dans sa composition.

3) Démontrer que les champs électriques et magnétiques sont forcément transverses, terme que l'on définira. Quelle relation permet de relier les champs électriques, magnétiques et la direction de propagation ?

4) Donner les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique, de la puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge et du vecteur de Poynting pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide sans charge ni courant. Commenter.

5) On suppose que l'équation de propagation est vérifiée par une fonction scalaire $u(x,y,z,t)$. Cette fonction représente une onde plane progressive monochromatique. Sous quelle forme peut-elle s'écrire ? Définir toutes les caractéristiques de cette onde.

6) Quelle relation permet de relier les champs électriques, magnétiques et le vecteur d'onde pour une onde plane progressive monochromatique ? Donner la relation de dispersion.

7) Expliquer ce qu'est la polarisation d'une onde. Donner certains cas particuliers. Comment mettre en évidence une polarisation rectiligne ?

8) Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Quelles en sont les conséquences ?

9) Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace x < 0. En x = 0, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose sa phase à l'origine nulle. Donner l'expression de l'onde incidente (champ E et B).

10) En utilisant le fait que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une interface, donner l'expression de l'onde réfléchie (champ E et B).

11) Retrouver l'expression de l'onde résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Commenter.

8 Exercices

8.1 Solution de l'équation de propagation

Montrer que $u(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ est solution de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

8.2 Solution des équations de d'Alembert en ondes planes progressives

1) Etablir les équations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en présence de charge et de courant dans un premier temps. Montrer que dans le vide local elles se mettent sous la forme d'un opérateur

$\vec{\Delta}(\ ) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2(\ )}{\partial t^2}$ (dit opérateur d'Alembertien) qui, appliqué aux champs, donne $\vec{0}$. Commenter dans ce dernier cas la dépendance temporelle des équations de d'Alembert.

2) Plaçons, nous dans le cas où les champs ne dépendent que du temps et d'une unique coordonnée spatiale suivant l'axe (Oz), en coordonnées cartésiennes. On note alors $\xi(z,t)$ l'une des composantes de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ ne dépendant que de la côte z et du temps t.

a) Rappeler la définition d'une onde plane.

b) Trouver la solution des équations de d'Alembert à une dimension en onde plane progressive. Quelle est la dimension du terme $\varepsilon_0 \mu_0$?

c) Généraliser ces résultats au cas d'une direction de propagation quelconque définie par le vecteur unitaire $\vec{n} = \alpha \overrightarrow{u_x} + \beta \overrightarrow{u_y} + \gamma \overrightarrow{u_z}$.

3) On se place dans le cas où $\vec{n} = \overrightarrow{u_z}$. Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux. Trouver la relation liant $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{n}$.

4) Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}. Commenter. Exprimer le vecteur de Poynting ainsi que la puissance transportée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation. En déduire le vecteur vitesse de propagation de l'énergie.

8.3 Champ électromagnétique

On considère le champ électrique, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + kz)\overrightarrow{u_x} + E_0 \sin(\omega t + kz)\overrightarrow{u_y} \quad avec \quad k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,\omega$$

1) Vérifier la compatibilité de cette expression avec l'équation de propagation.

2) Déterminer le champ magnétique associé.

3) Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

8.4 Exemple d'onde électromagnétique

On s'intéresse à la propagation de l'onde électromagnétique définie par : $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp\big(i(\omega t - \alpha(x+y))\big)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$. E_0, α et ω sont des constantes positives.

1) Cette onde se propage-t-elle ?

2) Donner le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde.

3) Est-elle plane ?

4) Que dire de sa polarisation ?

5) Evaluer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$.

6) Que veut la densité volumique de charge ?

7) Sachant que la densité volumique de courant est de même nulle, en déduire une relation entre α, ω et c, vitesse de la lumière dans le vide.
8) Calculer le vecteur de Poynting moyen. Commenter son expression.

8.5 Caractérisation d'ondes

1) Soit l'onde $\underline{\overrightarrow{E_1}} = E_0 \exp\left(i\left(ky+\omega t\right)\right)\overrightarrow{u_z}$

a) Quelle est sa direction de propagation ?
b) Quelle est sa direction de polarisation ?

2) Soit l'onde $\underline{\overrightarrow{E_2}} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\left(\overrightarrow{u_x}+2\overrightarrow{u_y}\right)$

a) Quelle est sa direction de propagation ?
b) Quelle est sa direction de polarisation ?

3) Soit l'onde $\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\left(\overrightarrow{u_x}+2i\overrightarrow{u_y}\right)$ Que dire de sa polarisation ?

8.6 Polarisation d'onde électromagnétique

1) Décrire l'état de polarisation des ondes suivantes :

$$(a) \quad \vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t + kz\right)\overrightarrow{u_x} + E_0 \cos\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{u_y}$$

$$(b) \quad \vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right)\overrightarrow{u_x} + E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right)\overrightarrow{u_y}$$

2) Donner l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le sens des x négatifs, à polarisation circulaire.

8.7 Superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0, de même pulsation ω et se propageant respectivement selon les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. On pose pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$:

$$\overrightarrow{u_1} = \sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_2} = -\sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z}$$

1) Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde k_1 et k_2 ?
2) Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à $\overrightarrow{u_y}$ et qu'ils sont en phase dans le plan x = 0, donner leur expression sous forme complexe.
3) En déduire l'expression du champ électrique total. Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?
4) Donner la forme du champ magnétique. Commentaires.
5) En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

8.8 Détermination rapide du champ électrique réfléchi

On considère l'onde : $\underline{\overrightarrow{E_i}}\left(z,t\right) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - kz\right)\right)\overrightarrow{u_x}$ arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $z \geq 0$.

1) Que peut-on envisager concernant la pulsation, la direction de propagation et la polarisation de l'onde réfléchie ?

2) En déduire l'expression du champ réfléchi. On fera intervenir le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$ du champ électrique. Celui-ci se définit comme : $\underline{r} = \dfrac{\underline{E_r}(z_0,t)}{\underline{E_i}(z_0,t)}$ où z_0 est la position du changement de milieu.
3) Quelle considération physique doit-on faire intervenir afin de calculer explicitement $\underline{r}$? Retrouver ainsi sa valeur.

8.9 Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre z = 0 et z = a. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement suivant Ox et de sens de propagation opposés ± u_z, de normes respectives E_1 et E_2.
1) Donner l'expression du champ électrique complexe résultant de la superposition, puis la forme exacte du champ électrique dans la cavité en utilisant les conditions aux limites.
2) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?
3) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?
4) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?
5) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental n = 1 est prédominant.