Outils mathématiques

Extrait du programme

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en oeuvre du programme de physique de la classe de deuxième année TSI sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 1 du programme de première année et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année. L'expression des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent sera mis sur le rôle des conditions aux limites.

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles seront mobilisées principalement dans le cours de chimie sur la thermodynamique de la transformation chimique ; les fondements feront l'objet d'une étude dans le cadre du chapitre « calcul différentiel » du cours de mathématique.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1. Analyse vectorielle (cf. Cours de Mécanique des fluides et Electromagnétisme)	
Gradient	Connaître le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Utiliser le théorème d'Ostrogradski fourni. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Utiliser le théorème de Stokes fourni. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir $\Delta f = \text{div}\,(\text{grad}\, f)$. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle :$\text{rot}(\text{rot}A) = -\Delta A + \text{grad}(\text{div}A)$.
2. Équations aux dérivées partielles (cf. Cours de conduction thermique et Electromagnétisme)	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielle connue. Transposer une solution fréquemment rencontrée dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
3. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée.

Sommaire

1 Fonctions d'une seule variable

1.1 Dérivée d'une fonction d'une seule variable

Considérons une fonction f dépendant d'une variable t que l'on note $f(t)$.

La dérivée de f par rapport à t est :

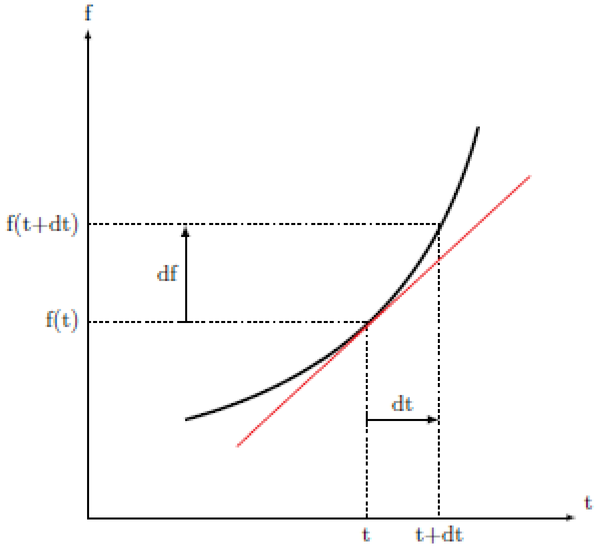
$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{dt \to 0}\left(\frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}\right)$$

La notation "d" signifie que dt est infiniment petit. On dit que c'est un **élément infinitésimal**, donc $dt \to 0$.

Pour simplifier la notation de dérivée, on écrit donc tout simplement :

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}}$$

La dérivée s'interprète géométriquement comme la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f



<u>Exemple</u> :

On considère un point M se déplaçant selon l'axe Ox, alors $f(t) = x(t)$. La vitesse du point M selon Ox s'écrit :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{x(t+dt)-x(t)}{dt}$$

1.2 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

En multipliant par dt, on peut réécrire cette égalité d'une autre manière : $\boxed{df(t) = f(t+dt)-f(t)}$

$df(t)$ est nommée différentielle de f en t. La différentielle de f représente la variation de f lorsque t varie de t à $t+dt$.

<u>Exemple</u> :

Le déplacement élémentaire de M selon l'axe Ox est représenté par la différentielle de $x(t)$:

$$dx(t) = x(t+dt)-x(t)$$

On peut aussi l'appeler déplacement infinitésimal.

1.3 Intégration d'une fonction d'une seule variable

L'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

<u>Exemple</u> :

On considère un point M se déplaçant selon l'axe Ox. On connait la vitesse $v(t)$ du point M selon Ox. On souhaite retrouver sa position $x(t)$.

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) \Rightarrow d(x(t)) = v(t)dt \Rightarrow \int_{x=x(0)}^{x(t)} d(x(t)) = \int_{t=0}^{t} v(t)dt \Rightarrow x(t)-x(0) = \int_{t=0}^{t} v(t)dt$$

<u>Remarque</u> :

Toujours préciser les bornes d'une intégrale !

1.4 Dérivée de fonctions composées

Considérons une fonction f qui dépend d'une variable x, cette variable x étant elle-même une fonction d'une variable t. On peut donc considérer f comme une fonction de x ou comme une fonction de t. On peut donc écrire $f(x)$ ou $f(t)$ ou $f(x(t))$. En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on obtient :

$$\boxed{\frac{df}{dt}=\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

<u>Remarque</u> :
La notation différentielle est donc particulièrement adaptée pour traiter les dérivées de fonctions composées car elle fait apparaître de manière explicite la variable choisie pour la dérivation.
<u>Exemple</u> :

L'énergie cinétique d'un point M se déplaçant selon Ox s'écrit : $E_c=\frac{1}{2}mv^2$

Sa dérivée par rapport à v est donc : $\frac{dE_c}{dv}=\frac{d\left(\frac{1}{2}m(v)^2\right)}{dv}=\frac{1}{2}m(2v)=mv=m\frac{dx}{dt}$

Or, v est une fonction du temps t, on peut donc cherche à dérivée l'énergie cinétique par rapport à t :

$$\frac{dE_c}{dt}=\frac{d\left(\frac{1}{2}m(v(t))^2\right)}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d\left((v(t))^2\right)}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d\left((v)^2\right)}{dv}\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt}=m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dE_c}{dv}\frac{dv}{dt}$$

2 Fonctions de plusieurs variables

Les grandeurs qui vont être étudiées en physique-chimie cette année peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Ce sont donc des fonctions de plusieurs variables.
<u>Exemple</u> :
Dans une base cartésienne, la vitesse d'un point matériel se déplaçant selon Ox peut dépendre de x et t : $v(x,t)$

2.1 Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

On peut dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables, les autres étant fixées. On dit alors que l'on fait une dérivation partielle et on utilise la notation ∂.
<u>Exemple</u> :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à t : $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=\frac{v(x,t+dt)-v(x,t)}{dt}$

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à x : $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=\frac{v(x+dx,t)-v(x,t)}{dx}$

On pourra aussi trouver une notation où l'on précisera quelles variables sont fixées.
<u>Exemple</u> :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à x (t étant fixé) : $\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)_t$

On a donc pour la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction $f(x,y,z,t)$ de plusieurs variables :

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}=\left(\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}\right)_{y,z,t}=\frac{f(x+dx,y,z,t)-f(x,y,z,t)}{dx}}$$

2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Comme pour une fonction d'une seule variable, on peut définir la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Elle représentera sa variation pour une variation infinitésimale de chacune de ses variables.

<u>Exemple</u> :

Pour la vitesse d'un point matériel se déplaçant selon Ox qui peut dépendre de x et t, sa différentielle s'écrit :

$$dv(x,t) = v(x+dx,t+dt) - v(x,t) \approx v(x+dx,t) - v(x,t) + v(x,t+dt) - v(x,t)$$

Donc : $dv(x,t) = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} dt$

On admet donc l'écriture suivante pour la différentielle d'une fonction $f(x,y,z,t)$ de plusieurs variables :

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt}$$

En physique-chimie, la notion de différentielle est utilisée pour noter les variations élémentaires ou infinitésimales d'une grandeur.

2.3 Intégration d'une fonction de plusieurs variables

2.3.1 Intégrale simple

De la même manière que pour la dérivation, une fonction $f(x,y,z,t)$ dépendant de plusieurs variables peut être intégrée par rapport à l'une de ses variables. Les autres variables sont alors fixées. On note son intégrale par rapport à x : $\int f(x,y,z,t)dx$

<u>Remarque</u> :

Ne pas oublier de préciser la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction !

2.3.2 Intégrale double ou triple

Quand une grandeur dépend de plusieurs variables, on peut l'intégrer par rapport à une surface ou à un volume. Lorsque l'on intègre par rapport à une surface, on parle d'intégrale double.

L'intégrale double de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x et y s'écrit : $\iint f(x,y,z)dxdy$

Lorsque l'on intègre par rapport à un volume, on parle d'intégrale triple.

L'intégrale tri ple de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x, y et z s'écrit : $\iiint f(x,y,z)dxdydz$

Si la fonction précédente peut s'écrire sous la forme : $f(x,y,z) = g(x)h(y)j(z)$, nous admettrons que, sous certaines conditions supposées vérifiées dans tout le cours de Physique-Chimie, :

$$\iiint g(x)h(y)j(z)dxdydz = \left(\int g(x)dx\right)\left(\int h(y)dy\right)\left(\int j(z)dz\right)$$

3 Développements limités

En physique-chimie, la résolution des problèmes ne requiert souvent que la connaissance du comportement de fonctions physiques au voisinage d'un point. On cherche donc à remplacer l'expression de la fonction au voisinage d'un point donné, par une expression plus simple à manipuler et donc à étudier.

3.1 Formule de Taylor

Le développement limité à l'ordre p d'une fonction f au voisinage de x_0 est donnée par la formule de Taylor :

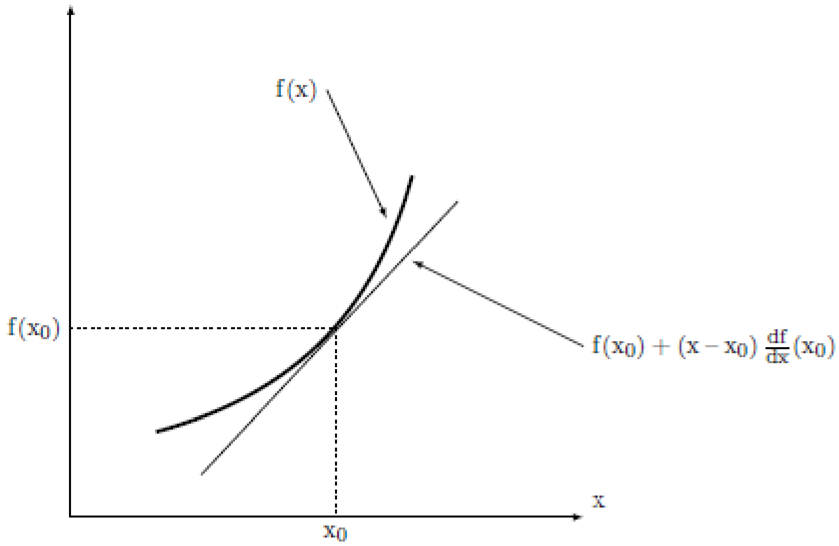
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{ordre\,0} + \underbrace{(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)}_{ordre\,1} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)}_{ordre\,2} + \dots + \underbrace{\frac{(x-x_0)^p}{p!}\frac{d^pf}{dx^p}(x_0)}_{ordre\,p} + \dots$$

3.2 Approximation linéaire

On se limitera la plupart du temps au développement limité à l'ordre 1 en physique $\left(|x-x_0| \ll 1\right)$, ce qui donne :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)$$

Graphiquement, cela revient à confondre la fonction f avec sa tangente en x_0. On dit que l'on a linéarisé la fonction f au voisinage de x_0. Bien entendu, confondre les deux courbes n'a de sens qu'au "voisinage" de x_0 c.à.d. pour les x tels que $|x-x_0| \ll 1$.



Exemple :

On considère toujours la vitesse d'un point M se déplaçant selon Ox. Cette vitesse dépend de x et de t.
On souhaite réaliser le développement limité à l'ordre 1 de la vitesse au voisinage de x_0. On pose : $x = x_0 + dx$ pour que $|x-x_0| = |dx| \ll 1$.

$$v(x_0+dx,t) = v(x_0,t) + dx\frac{\partial v}{\partial x}(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{v(x_0+dx,t)-v(x_0,t)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0)$$

On retrouve la dérivée partielle de la vitesse par rapport à x.

$v(x_0+dx,t) - v(x_0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0)dx$ *représente la variation élémentaire de la vitesse selon x au voisinage de x_0.*

3.3 Développements limités usuels en 0

Pour $x_0 = 0$ et $x \ll 1$, on obtient les développements limités usuels suivants :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\sin(x) = x + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\tan(x) = x + \ldots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

4 Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère de centre O servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

4.1 Coordonnées cartésiennes

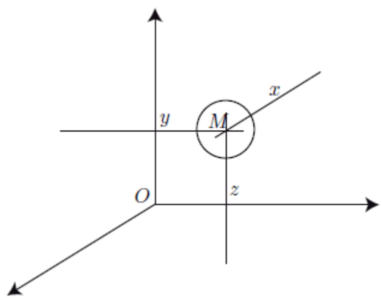
Dans le repère $\Re\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x,y,z).

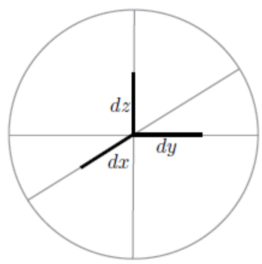
Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Re}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\Re}$$





4.2 Coordonnées cylindriques

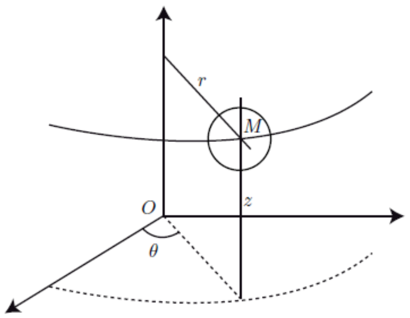
Dans le repère $\Re_{cyl}\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$, on utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z).

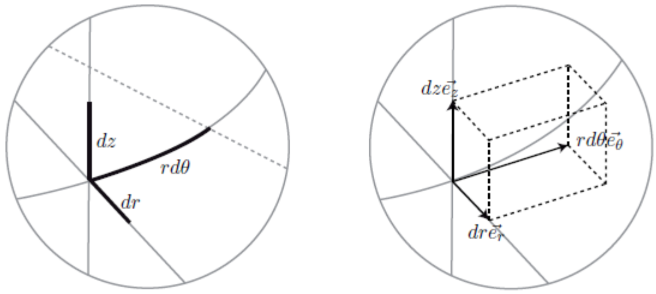
Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$





4.3 Coordonnées sphériques

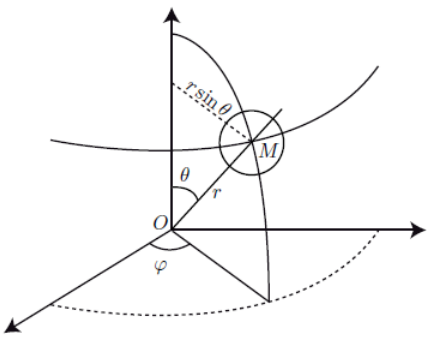
Dans le repère $\Re_{sph}\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi}\right)$, on utilise les coordonnées sphériques (r,θ,φ).

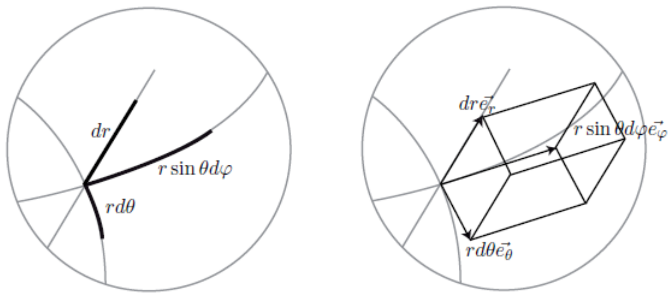
Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\sin\theta d\varphi \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$





5 Surfaces et volumes élémentaires

5.1 Intérêt et méthodologie

Les grandeurs physiques (pression, champs, forces,…) que nous allons étudier cette année ne seront pas forcément uniformes. Elles peuvent alors varier en fonction des coordonnées choisies. Pour pouvoir les considérer uniforme, nous serons alors amener à travailler sur de petites surfaces, appelées surfaces élémentaires, ou de petits volumes, appelés volumes élémentaires.

Pour pouvoir exprimer ces surfaces ou volumes élémentaires, la méthode est la suivante :

- Bien choisir le type de coordonnées adapté à la symétrie du problème
- Dessiner l'élément de volume ou de surface avant de l'exprimer mathématiquement
- Bien repérer les paramètres qui varient, leurs bornes et les paramètres qui restent fixes.

Pour calculer une surface ou un volume, il faut alors intégrer les surfaces ou volumes élémentaires correspondants. Ces intégrales sont des intégrales multiples. Leur résolution est abordée dans la partie 3.

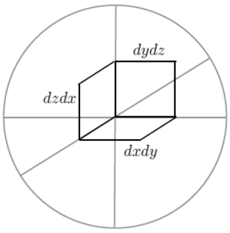
Nous admettrons que, sous certaines conditions supposées vérifiées dans tout le cours de Physique-Chimie, :

$$\iiint f(x)g(y)h(z)dxdydz = \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(y)dy\right)\left(\int h(z)dz\right)$$

5.2 Coordonnées cartésiennes

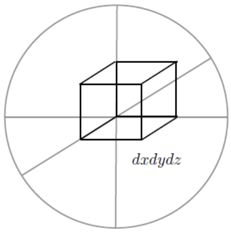
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dxdz \\ z = cte & dS = dxdy \end{cases}$$



Volume élémentaire

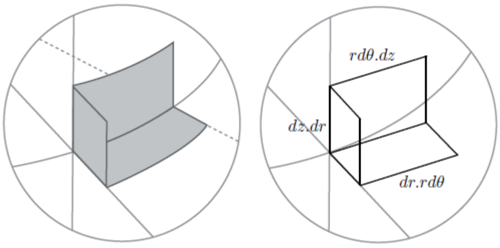
$$dV = dxdydz$$



5.3 Coordonnées cylindriques

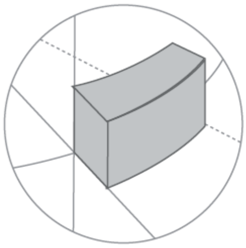
Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = rd\theta dz \\ \theta = cte & dS = drdz \\ z = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$



Volume élémentaire

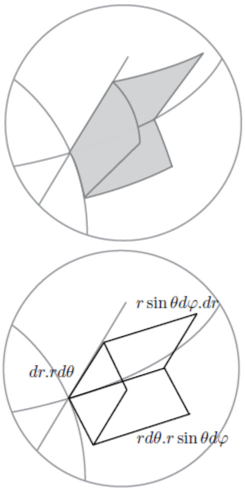
$$dV = rdrd\theta dz$$



5.4 Coordonnées sphériques

Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ \theta = cte & dS = r\sin\theta drd\varphi \\ \varphi = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$



Volume élémentaire

$$dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$