

Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen

Hypothèses : régime stationnaire, référentiel galiléen, base cartésienne

Système fermé : particule de fluide centrée sur le point $M(x, y, z)$ de volume $dV = dx dy dz$, de masse $dm = \mu(M) dV$ soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{u}_z$

Sujet : étude du champ de pression $P(M)$

Bilan des forces :

Forces de pesanteur : $\vec{u}_V = -\mu(M) g \vec{u}_z$

$$\left(P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) - P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \right) dy dz \vec{u}_x$$

Forces de pression : $\vec{u}_S = \left(P\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) - P\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) \right) dx dz \vec{u}_y$

$$\left(P\left(x, y, z - \frac{dz}{2}\right) - P\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) \right) dx dy \vec{u}_z$$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{u}_V + \vec{u}_S = \vec{0}$

Projection sur les axes :
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{dP}{dz}(z) = -\mu(z)g \end{cases} \Rightarrow \text{Pression indépendante des coordonnées } x \text{ et } y$$

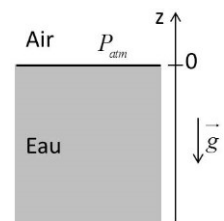
Relation de statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g \quad (1)$$

Cas d'un fluide incompressible et homogène :

Hypothèses : Pression à la surface de l'eau P_{atm} et axe (Oz) orienté vers le haut

$$P(z) = P_{atm} - \mu g z$$



Cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait :

Hypothèses : Fluide compressible, température uniforme T_0 , pression à altitude nulle P_{atm} et axe (Oz) vers le haut

$$\text{Masse volumique : } \mu = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT_0} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

Intégration entre une altitude nulle et z :

$$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

Comparaison des deux modèles :

$$\text{Lorsque la variation d'altitude est très faible : } P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right) \approx (z=0)gz$$

=> Cohérence entre les deux modèles