# Magnétostatique

## Distributions de courants électriques

**L'intensité** $I$ (en A) du courant électrique à travers une surface $S$ est liée à la charge $dq$ qui traverse $S$ pendant $dt$.

$$dq = Idt \qquad (1)$$

Le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ (A.m$^{-2}$) associé à un mouvement d'ensemble de particules de charge $q$, de densité volumique $n$, à la vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j} = qn\vec{v} = \rho_m \vec{v} \qquad (2)$$

L'intensité du courant électrique traversant une surface $S$ est égale au flux du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$ à travers cette surface.

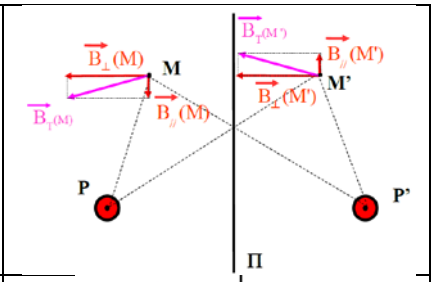
$$I = \iint_S \vec{j}(M,t) \cdot \overrightarrow{dS} \qquad (3)$$

## Symétries de la distribution de courants

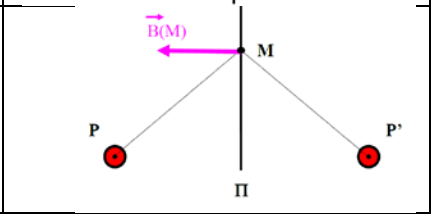
### Plan de symétrie

Une distribution de courant possède un **plan de symétrie** $\Pi$ si :
- $\Pi$ est un plan de symétrie géométrique de la distribution
- $\vec{j}(P') = sym\left[\vec{j}(P)\right]$

Si le plan $\Pi$ est **plan de symétrie** de la distribution de courant, alors ce plan est un **plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique**.



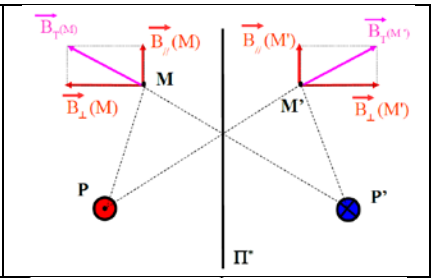

Conséquence :
Si $M$ appartient au plan de symétrie $\Pi$, alors le champ magnétique est perpendiculaire au plan de symétrie $\Pi$ : $\vec{B}(M) \perp \Pi$



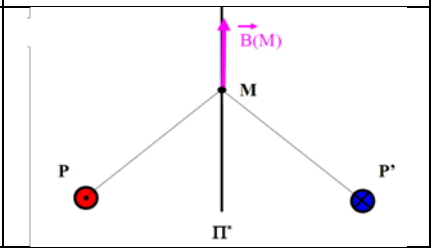

### Plan d'antisymétrie

Une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie $\Pi^*$ si :
- $\Pi^*$ est un plan de symétrie géométrique de la distribution
- $\vec{j}(P') = -sym\left[\vec{j}(P)\right]$

Si le plan $\Pi^*$ est **plan d'antisymétrie** de la distribution de courant, alors ce plan est un **plan de symétrie pour le champ magnétostatique**.




Conséquence :
Si $M$ appartient au plan d'antisymétrie $\Pi^*$, alors le champ magnétique appartient au plan d'antisymétrie $\Pi^*$ : $\vec{B}(M) \| \Pi^*$




## Invariances de la distribution de courants

Si la distribution de courants est invariante par translation selon un axe (par rotation autour d'un axe), le champ l'est aussi : il ne dépend pas de la coordonnée le long (coordonnée angulaire qui définit la rotation autour) de cet axe.

## Flux du champ magnétique

Le flux du champ magnétique $\phi$ (en Weber : Wb = T.m$^2$) à travers une surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est à **flux conservatif**.

$$\phi = \oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0 \qquad (4)$$

Conséquence : Le champ magnétique s'évase en se dirigeant vers les champs faibles, il ne peut diverger ou converger vers un point.

## Théorème d'Ampère

| | |
|---|---|
| La circulation du champ magnétostatique créé par un ensemble de courants sur un contour fermé orienté est égale à la somme algébrique des courants enlacés $I_{int}$ multipliée par $\mu_0$ | $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{int}}$ (5) |

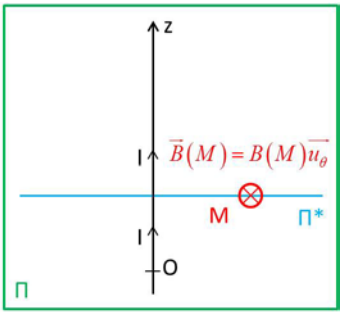
Conséquence : un tire-bouchon qui tourne dans le sens du courant (respectivement sens des lignes de champ) progresse dans le sens du champ à l'intérieur du circuit (respectivement sens de l'intensité du courant).

## Ordres de grandeur

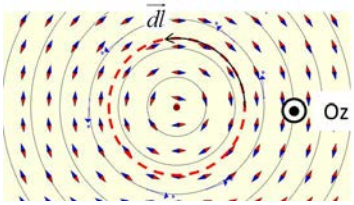
| Dispositif | B (T) |
|---|---|
| Champ magnétique terrestre, en surface | $4{,}7.10^{-5}$ |
| Champ créé à 1 cm d'un fil rectiligne parcouru par 10 A | $2.10^{-5}$ |
| Champ créé à 1 mm d'un aimant permanent | 0,1 à 1 |
| Electroaimant | 10 à 100 |
| Etoile à neutrons, en surface | $10^{11}$ |

## Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

### Symétries et invariances




Plan de symétrie de la distribution de courant : plan contenant le fil et le point $M$
Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie : $\vec{B} = B(M)\vec{u_\theta}$
La distribution de courants étant invariante par translation selon $z$ et rotation selon $\theta$, on a : $\vec{B} = B(r,\theta,z)\vec{u_\theta} = B(r)\vec{u_\theta}$




### Contour d'Ampère

Cercle d'axe $Oz$ et de rayon $r$ parcouru dans le sens trigonométrique passant par le point $M$.

### Calcul du champ magnétostatique

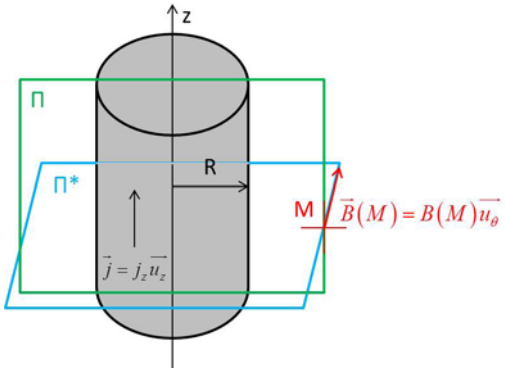
Circulation : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B(r)\vec{u_\theta}\cdot r d\theta\vec{u_\theta} = B(r)\int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r B(r)$

Courant intérieur : $I_{\text{int}} = +I$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$

## Cylindre parcouru par un courant volumique

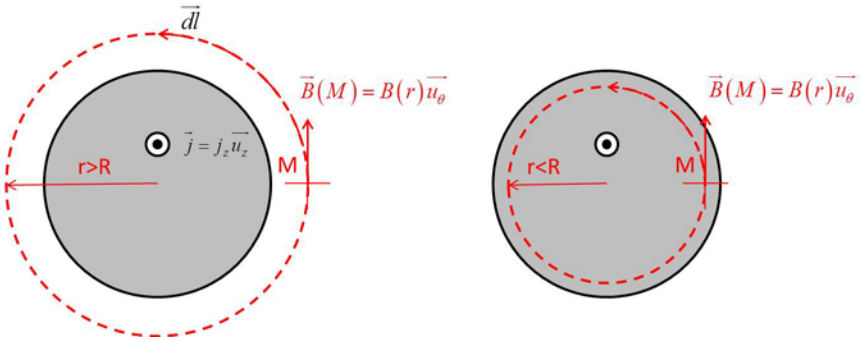
### Symétrie et invariance




Plan de symétrie de la distribution de courant : plan contenant l'axe $Oz$ et le point $M$
Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie : $\vec{B} = B(M)\vec{u_\theta}$
La distribution de courants étant invariante par translation selon $z$ et rotation selon $\theta$, on a : $\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}$

**Contour d'Ampère**

Cercle d'axe $Oz$ et de rayon $r$ parcouru dans le sens trigonométrique.




**Calcul du champ magnétostatique**

Circulation :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl}=\oint_\Gamma B(r)\vec{u_\theta}\cdot rd\theta\vec{u_\theta}=B(r)\int_0^{2\pi} rd\theta=2\pi rB(r)$$

Courant intérieur :

- $r>R$ : $I_{\text{int}}=\iint \vec{j}\cdot\vec{dS}=j_z\pi R^2$
- $r<R$ : $I_{\text{int}}=j_z\pi r^2$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi rB(r)=\mu_0 j_z\pi r^2 \Rightarrow$

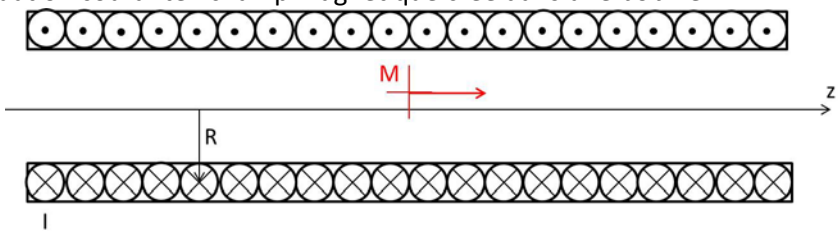
$$\begin{cases}\vec{B}=\dfrac{\mu_0 j_z r}{2}\vec{u_\theta} & r<R\\ \vec{B}=\dfrac{\mu_0 j_z R^2}{2r}\vec{u_\theta} & r>R\end{cases}$$

## Solénoïde « infini » circulaire parcouru par un courant I

On considère un solénoïde d'axe $Oz$ de taille infinie. Le solénoïde est constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre : soit $R$ son rayon et $n$ son nombre de spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité $I$. Nous calculons ici le champ en tout point intérieur au solénoïde.

Le point $M(r,\theta,z)$ est repéré par ses coordonnées cylindriques.

Modélisation d'une situation courante : champ magnétique créé dans une bobine

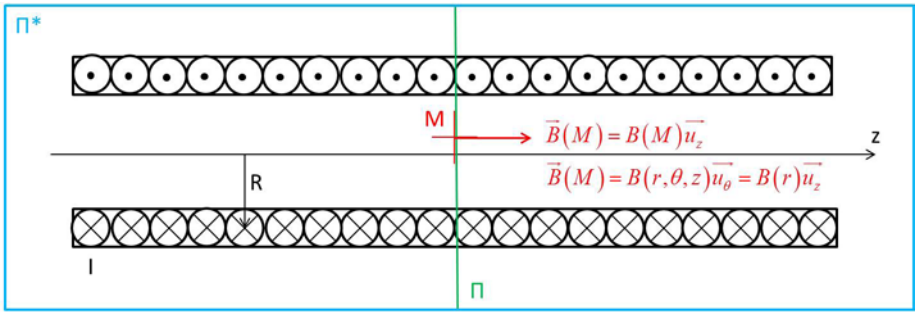



Hypothèse supplémentaire : le champ magnétostatique est nul à l'extérieur du solénoïde (à comprendre avec les lignes de champ).

**Symétrie et invariance**

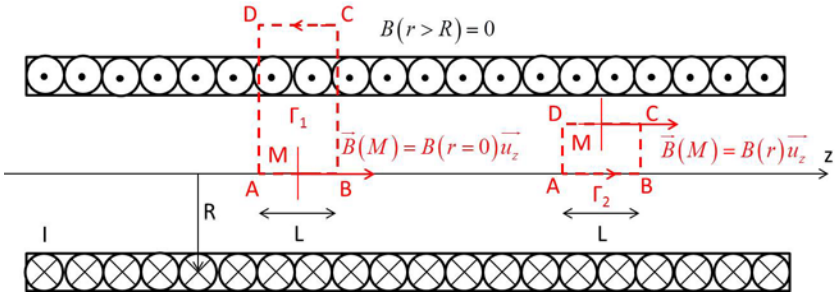
Plan de symétrie de la distribution de courants : plan perpendiculaire à l'axe $Oz$ et contenant le point $M$. Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie : $\vec{B}=B(M)\vec{u_z}$

La distribution de courants étant invariante par translation selon $z$ et rotation selon $\theta$, on a : $\vec{B}=B(r)\vec{u_z}$



**Contour d'Ampère**

Cadre ABCD dont un des côtés est placé sur l'axe $Oz$, de longueur $L$ selon $Oz$, orienté dans le sens trigonométrique et passant par $M$.




**Calcul du champ magnétostatique**

Circulation : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B(r)\vec{u_z}\cdot dz\vec{u_z} = B(r=0)\int_A^B dz - B(r)\int_C^D dz = L\big(B(r=0)-B(r)\big)$

Courant intérieur :

- $r>R$ : $I_{int} = nIL \quad\Rightarrow\quad L\big(B(r=0)-B(r)\big)=\mu_0 nIL \quad\Rightarrow\quad B(r=0)=\mu_0 nI$

- $r<R$ : $I_{int}=0 \quad\Rightarrow\quad B(r=0)-B(r)=0 \quad\Rightarrow\quad B(r)=B(r=0)$

Dans un solénoïde « infini » le champ magnétostatique est uniforme en tout point intérieur et égal à : $\vec{B}=\mu_0 nI\vec{u_z}$