

Propagation

Hypothèses : dans le **vide**, en **absence de charges et courants**

Equation de propagation du champ électromagnétique

Equations de Maxwell :	Equation de propagation, équation d'onde, équation de d'Alembert :
$ \begin{aligned} (MG) \quad \text{div} \vec{E} &= 0 & (MA) \quad \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) \quad \text{div} \vec{B} &= 0 & (MF) \quad \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1) $	$ \begin{aligned} \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2) $
Célérité de l'onde ou vitesse de propagation de l'onde :	
$ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (3) $	

Onde plane progressive

Résolution générale d'une équation d'onde scalaire à une dimension

Soit $s(x, y, z, t)$ vérifiant $\Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Définitions : On dit qu'une onde est plane si, à chaque instant, la fonction $s(x, y, z, t)$ a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$ et appelée direction de propagation . L'onde plane est de plus progressive quand le signal se propage dans un sens déterminé.
Propriété : Les solutions de l' équation de propagation unidimensionnelle selon x peuvent s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives :
$ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow s(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad \text{ou} \quad s(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (4) $

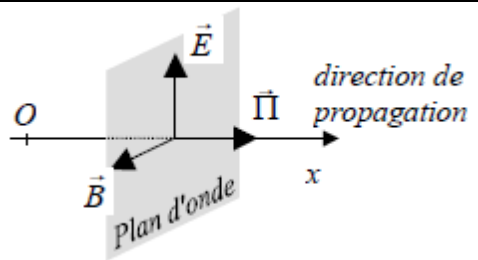
Solutions de l'équation de propagation du champ électromagnétique sous forme d'ondes planes progressives

Hypothèse : propagation selon les x croissants

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} B_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

Propriétés : Les champs électrique et magnétique n'ont pas de composantes suivant la direction de propagation. Les vecteurs sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de transverses . Les champs électrique et magnétique forment avec la direction de propagation un trièdre direct.	$ \vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} $
$ \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad (5) $	

Aspect énergétique

<u>Densité volumique d'énergie électromagnétique</u> équirépartie entre terme électrique et terme magnétique : $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$	<u>Vecteur de Poynting</u> dirigé selon la direction de propagation : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c \varepsilon_0 E^2 \vec{u}_x = c u \vec{u}_x$ L'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c.	
---	---	---

Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

Retour sur l'équation d'onde scalaire

Soit $s(x, y, z, t)$ vérifiant $\Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Définition :

Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f .

Une OPPM se propageant à la vitesse v selon la direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ s'écrit sous la forme :

$$s(x, y, z, t) = s_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) \quad (6)$$

où $\vec{r}$ représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes.

Elle est caractérisée par : - sa **pulsation**, ω , ou sa **fréquence**, f , ou sa période temporelle, T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

- son **vecteur d'onde**, $\vec{k}$, ou sa **longueur d'onde**, λ :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{v} \vec{n} \quad (8)$$

Elle présente une **double-périodicité** temporelle de période T et spatiale de période λ telle que :

$$\lambda = vT \quad (9)$$

Application au champ électromagnétique

Propagation unidimensionnelle et champ électrique polarisé rectilignement suivant Oy :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \end{pmatrix}$$

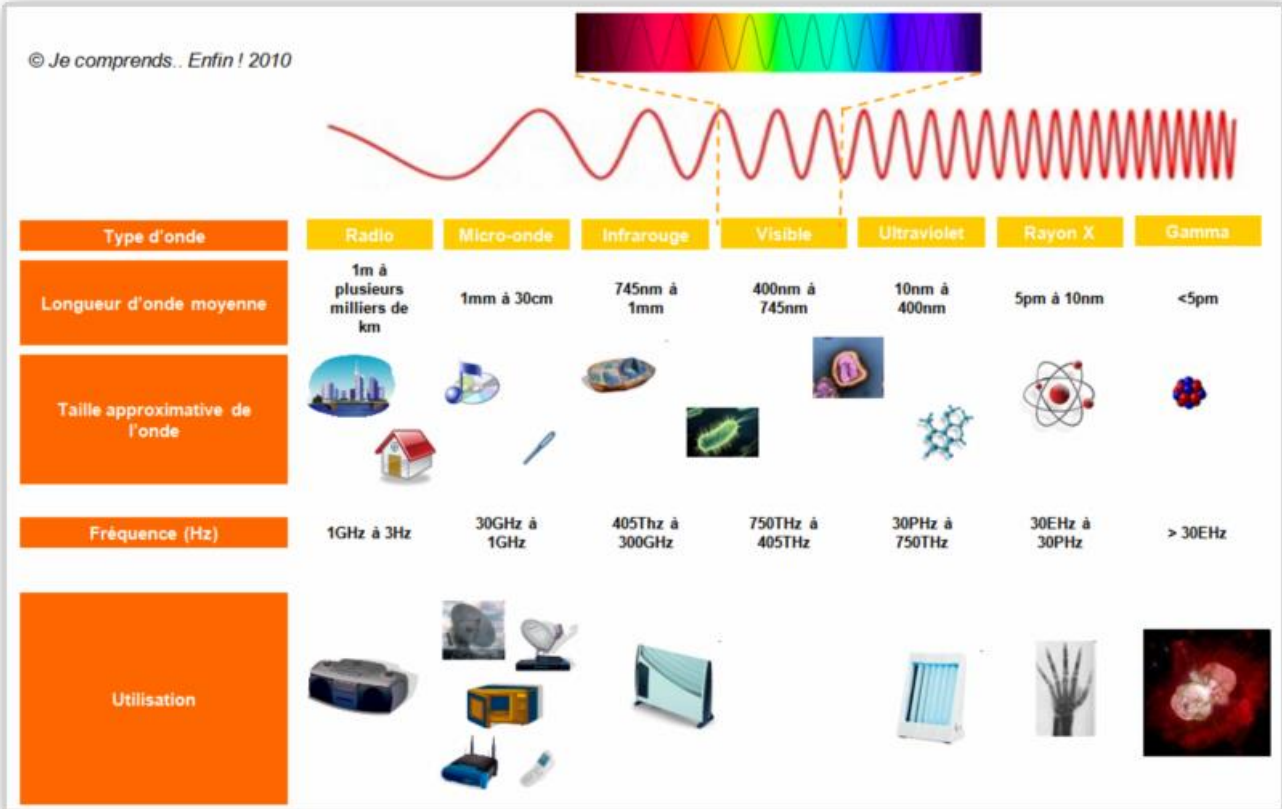
Propagation 3D et champ électrique polarisé rectilignement suivant Oy :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{k_z E_{0y}}{\omega} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \\ 0 \\ \frac{k_x E_{0y}}{\omega} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Relation de dispersion :	Champs électrique et magnétique forment avec le vecteur d'onde un trièdre direct :
$k = \frac{\omega}{c} \quad (10)$	$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \quad (11)$

Notation complexe et champ électrique polarisé rectilignement suivant Oy :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = E_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \vec{u}_y$$



Etats de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

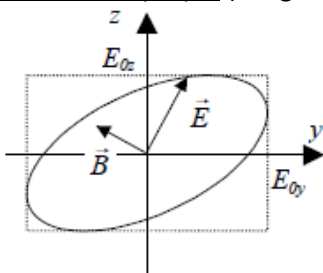
Définition :

La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde.

Dans le plan $x = 0$, on peut se ramener à l'expression suivante :

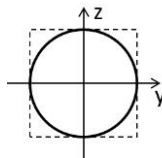
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_z$$

Polarisation elliptique (cas général) :



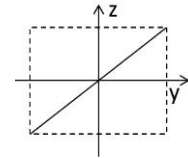
Polarisation circulaire :

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad E_{0y} = E_{0z}$$



Polarisation rectiligne :

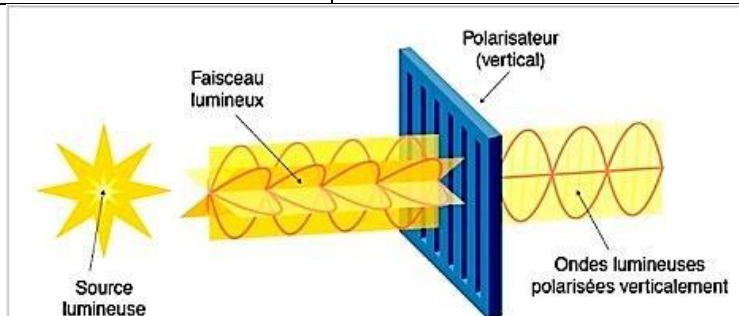
$$\varphi = 0 \text{ ou } \pi$$



Mise en évidence d'une polarisation rectiligne :

On place un autre polariseur à la suite du premier.

Si les deux polariseurs ont leur axe de transmission perpendiculaire, le champ électrique à la sortie de l'analyseur est nul.



Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

Définition :

Dans un conducteur parfait : $\gamma \rightarrow +\infty \Rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{0}, \rho \rightarrow 0, \vec{B} \rightarrow \vec{0}, \vec{j} = \vec{0}$

Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace $x < 0$. En $x = 0$, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Le champ électrique incident peut s'écrire : $\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t - k_i x) \vec{u}_y$

D'après la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$, on trouve le champ réfléchi :

$$\vec{E}_r = -E_{0i} \cos(\omega t + k_i x) \vec{u}_y$$

La superposition des deux donne : $\vec{E}_{vide} = 2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y$

D'après la relation de passage pour le champ magnétique en $x = 0$, on trouve un courant à la surface du conducteur

$$\text{parfait : } \vec{j}_s = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

Propriété :

La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait est une **réflexion totale** avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges surfaciques.

La superposition des ondes incidentes et réfléchies sur un conducteur parfait donne naissance à une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une **onde stationnaire**. L'onde ne se propage plus. Elle oscille sur place. L'onde stationnaire résultante ne transporte pas d'énergie.

La réflexion induit un **courant surfacique** non nul de même direction que le champ incident. Ce courant est à son tour une source de champ électromagnétique à l'origine du champ réfléchi.

