Devoir maison

Dans tout le problème, la permittivité électrique de l'air est égale à celle du vide, notée ε_0 et égale à $8,85.10^{-12} F.m^{-1}$.

1) Etude d'un condensateur plan

On se propose de calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ. Ce plan correspond au plan (Oxy) d'un système de coordonnées cartésiennes classique muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

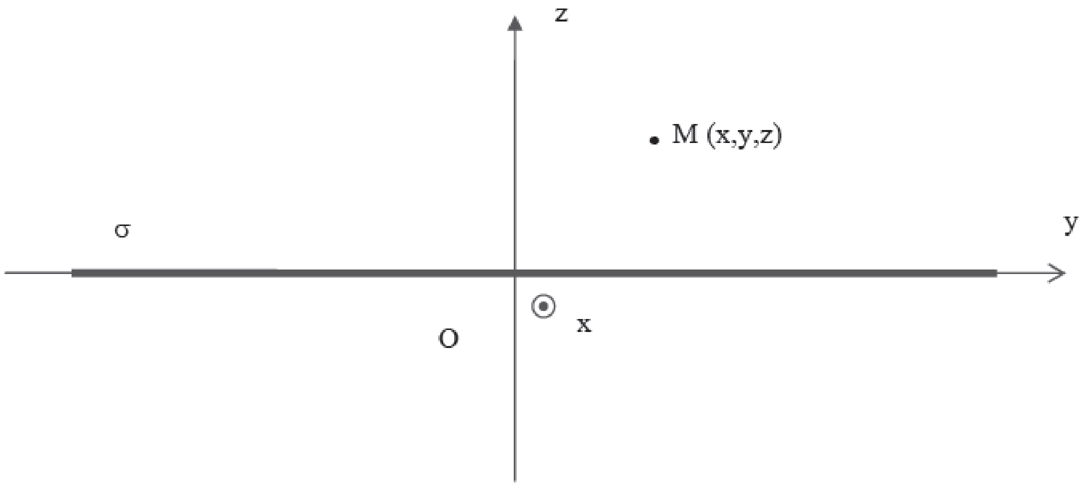

Figure 1

1) Montrer, par des considérations de symétrie, que le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par le plan uniformément chargé est perpendiculaire au plan en tout point de l'espace. On écrira donc $\vec{E}(M) = E(x, y, z)\overrightarrow{u_z}$. Justifier le fait que le champ électrique $\vec{E}(M)$ ne peut pas dépendre des coordonnées x et y du point M, soit $\vec{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u_z}$. Montrer par des considérations de symétrie que la fonction $E(z)$ est impaire.

2) Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ est uniforme au-dessus et en-dessous du plan.

3) Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant d'un champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int}.

4) En appliquant le théorème de Gauss sur une surface qu'on précisera clairement en faisant un schéma, déterminer la valeur du champ électrique en fonction de σ, ε_0 (constante diélectrique du vide) et d'un vecteur unitaire judicieusement choisi qu'on précisera (on distinguera les deux cas : $z > 0$ et $z < 0$). Une démonstration très précise est attendue.

5) Toujours par des considérations de symétrie, déterminer la valeur $E(0)$ du champ électrique dans le plan uniformément chargé.

6) Déterminer le potentiel électrique $V(z)$ en tout point de l'espace en fonction de σ, ε_0 et z (on prendra le potentiel nul en $z = 0$). On distinguera toujours les deux cas : $z > 0$ et $z < 0$.
On supposera la continuité du potentiel en $z = 0$.

7) Tracer l'allure des courbes $E(z)$ et $V(z)$ en précisant les valeurs aux points remarquables.

On considère maintenant un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de e. Le plan supérieur est situé dans le plan $z=+\frac{e}{2}$ et le plan inférieur dans le plan $z=-\frac{e}{2}$. Le plan supérieur est chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur est chargé avec une densité surfacique opposée (donc négative) $-\sigma$.

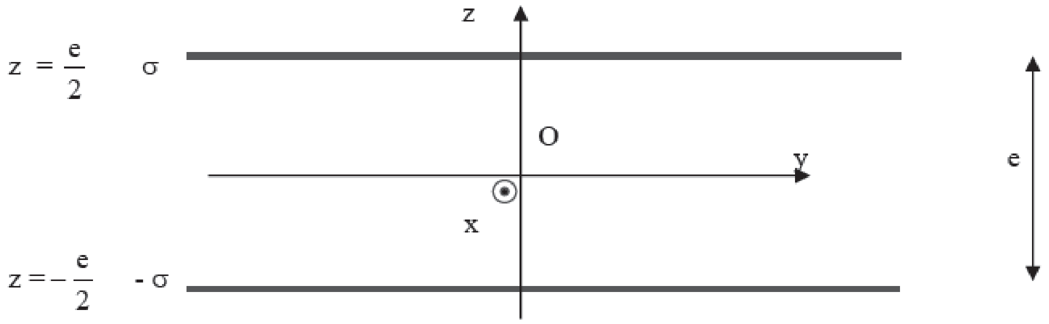

Figure 2

8) Déterminer le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace en fonction de σ, ε_0 et d'un vecteur unitaire qu'on précisera (on distinguera les trois zones délimitées par les deux plans). Porter sur un schéma le sens du champ électrique.

9) Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ pour $z \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$ en fonction de σ, z et ε_0. On prendra toujours le potentiel nul en $z=0$. Calculer la différence de potentiel U entre les deux plans infinis en fonction de σ, e et ε_0. Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de U et e.

Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques S. On supposera que les résultats trouvés pour le champ électrique et le potentiel ne diffèrent pas des résultats trouvés dans les questions précédentes, pourvu qu'on ne se place pas trop près des bords des armatures. L'armature supérieure porte alors la charge totale $+Q$ et l'armature inférieure la charge totale $-Q$.

10) Après avoir exprimé σ en fonction de Q et S, en déduire la différence de potentiel U entre les deux armatures en fonction de Q, ε_0, e et S. Définir et exprimer la capacité C du condensateur formé en fonction de ε_0, e et S. Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur pour lequel on prendra : $S \approx 1cm^2$ et $e \approx 10^{-5} m$.