Devoir maison

Deuxième problème : induction

Nous nous proposons, dans ce problème, d'étudier deux applications pratiques du phénomène d'induction.
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Première partie : chauffage par induction

Un disque conducteur de conductivité σ, d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ (figure 6). Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé verticalement suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_z$;
- il varie sinusoïdalement au cours du temps selon la forme : $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t)\vec{e}_z$, où B_m représente son amplitude et ω sa pulsation.

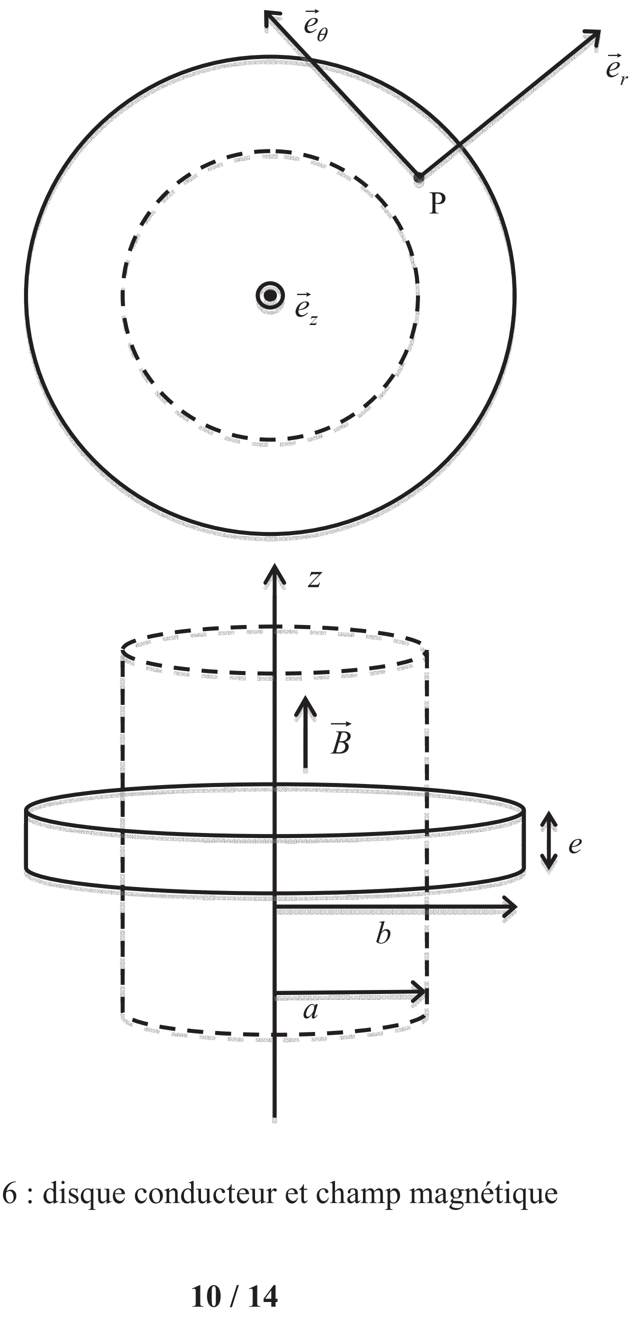

Figure 6 : disque conducteur et champ magnétique

Nous admettrons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit $\vec{j}$;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1 – Rappeler la relation liant le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ dans un conducteur de conductivité σ.

2 – On considère un contour circulaire Γ de rayon *r* et d'axe *Oz*. Déterminer la circulation $C(r,t)$ du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera $C(r,t)$ en fonction de *r*, $j(r,t)$ et σ.

3 – Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers la surface définie par le contour Γ.
On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

4 – En appliquant la loi de Faraday, déterminer l'expression du courant volumique induit $j(r,t)$ en fonction de σ, ω, *r*, *a*, B_m et *t*.
On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

5 – Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule.

6 – En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon *r*, de largeur *dr* et d'épaisseur *e*, déterminer l'expression de la puissance totale P_{joule} dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne $\langle P_{joule} \rangle$.

On montrera que $\langle P_{joule} \rangle$ peut se mettre sous la forme $\langle P_{joule} \rangle = A\omega^2 B_m^2$ où A est un coefficient que l'on exprimera en fonction de *e*, *a*, *b* et σ.

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas, le coefficient A est donné par l'expression :

$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}.$$

7 – Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques à induction pour chauffer les casseroles et leur contenu.
Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité ?
Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.

8 – En pratique, le champ magnétique utilisé a une pulsation ω de l'ordre de 2×10^5 rad.s^{-1} (courant de fréquence *f* de l'ordre de 30 kHz). Son intensité B_m est de l'ordre de 10^{-4} T.
On considère une plaque à induction de rayon $b = 10$ cm et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10$ cm, une épaisseur $e = 1{,}0$ cm et une conductivité $\sigma = 6{,}0 \times 10^7$ S.m^{-1}.
Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne $\langle P_{joule} \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.