

Devoir maison

Données numériques et mathématiques utiles aux trois problèmes

Constantes universelles :

- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0.10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ S.I.}$
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi.10^9} \text{ S.I.}$
- masse de l'électron : $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$
- charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$
- charge de l'électron : $q_e = -e = -1,6.10^{-19} \text{ C}$
- accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

Opérateurs mathématiques en coordonnées cartésiennes :

divergence :
$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

rotationnel :
$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

laplacien d'un champ scalaire :
$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

laplacien d'un champ vectoriel :
$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Relation concernant les opérateurs mathématiques vectoriels :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{Z}) = \text{grad}(\text{div} \vec{Z}) - \Delta \vec{Z} \text{ où } \vec{Z} \text{ est un vecteur et } \Delta \vec{Z} \text{ son laplacien.}$$

Trigonométrie :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Notation complexe pour une fonction scalaire dépendant sinusoïdalement du temps :

Pour une fonction réelle $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on notera la fonction complexe $\underline{x}(t)$ correspondante :

$$\underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

où $x(t) = \Re(\underline{x})$ et $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ ($\underline{X}_m$ représente l'amplitude complexe de $\underline{x}$) et $j^2 = -1$.

On a donc $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

Premier problème : ondes électromagnétiques

Dans ce problème, nous nous proposons d'étudier, dans un premier temps, la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide puis, dans un deuxième temps, la réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait tel qu'un miroir.

Première partie : propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

On veillera, dans toute cette partie, à utiliser les opérateurs vectoriels de manière rigoureuse et claire.

On considère un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ où $\vec{E}$ désigne le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique.

L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1/ Ecrire les quatre équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Que deviennent ces équations dans le vide ?

2/ Montrer que les équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, dans une région sans charge ni courant, ont pour expressions respectives :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

3/ Onde plane progressive monochromatique

On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω .

Les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ associés à cette onde sont données, en coordonnées cartésiennes, par les relations :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

où $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont des vecteurs constants, tels que $\vec{E}_0 = E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z$ et $\vec{B}_0 = B_{0y} \vec{e}_y + B_{0z} \vec{e}_z$.

Quelle est la direction de propagation de l'onde ?

Justifier le fait que cette onde est une onde plane, progressive et monochromatique.

Que représente la grandeur c dans l'expression des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$?

Quel est le vecteur d'onde $\vec{k}$ associé à cette onde ? On précisera clairement la direction, le sens et la norme de $\vec{k}$.

4/ Vérifier que cette onde satisfait aux équations de propagation précédentes à condition que c soit liée à ϵ_0 et μ_0 par une relation que l'on justifiera.

5/ Structure de l'onde plane progressive monochromatique

L'onde plane progressive monochromatique décrite précédemment se propage dans le vide.

En utilisant les équations de Maxwell et les données mathématiques fournies en début d'énoncé, établir les expressions des composantes B_y et B_z du vecteur $\vec{B}$ en fonction de E_{0y} , E_{0z} , c , ω , t et x .

En déduire :

- que le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux ;
- que les normes du champ électrique et du champ magnétique sont telles que : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$.

6/ Vecteur de Poynting

6.1/ Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ associé à une onde électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$).

Quelle est la signification physique de ce vecteur ?

Préciser les unités de ce vecteur.

6.2/ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ relatif à l'onde plane progressive monochromatique décrite précédemment. On exprimera $\vec{R}$ en fonction de c , ϵ_0 , E_0 (norme du vecteur $\vec{E}_0$), ω , t , x et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$ en fonction de c , ϵ_0 , E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Deuxième partie : réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait en incidence normale

L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k}$, se propage dans le vide suivant l'axe Ox dans le sens des x croissants. Le champ électrique qui lui est associé s'écrit : $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ avec E_0 constant et k la norme du vecteur d'onde $\vec{k}$.

7/ Quelle est la direction de polarisation du champ électrique ?

En $x = 0$, l'onde arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur tel que le montre la figure ci-dessous. Dans un tel conducteur, on admet que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls. L'onde incidente donne alors naissance à une onde réfléchie se propageant suivant l'axe Ox dans le sens des x décroissants. Son champ électrique $\vec{E}_r$ s'écrit donc :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + kx).$$

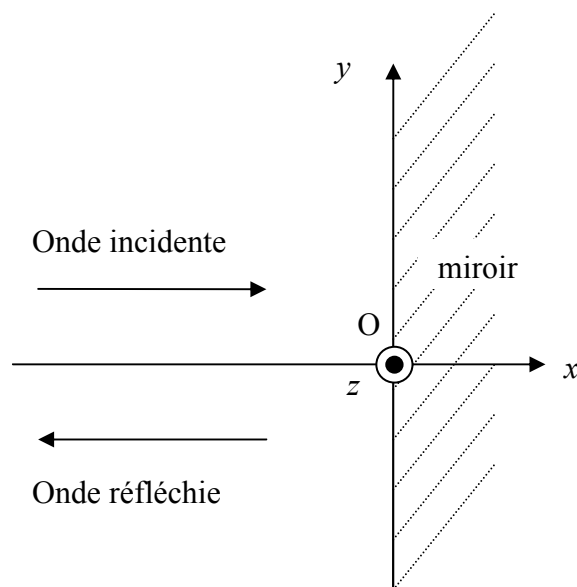


Figure : miroir plan parfaitement conducteur

8/ Relations de continuité

Ecrire les relations de continuité (ou relations de passage) que doivent vérifier les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'interface avec le conducteur parfait sur le plan d'équation $x = 0$ en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans les équations.

9/ Détermination du champ électromagnétique résultant

9.1/ Montrer, en utilisant les relations de continuité, que le champ électrique réfléchi $\vec{E}_r$ est polarisé rectilignement suivant l'axe Oy .

Etablir l'expression de $\vec{E}_{0r}$ en fonction de E_0 et du vecteur unitaire $\vec{e}_y$.

9.2/ Le champ magnétique incident $\vec{B}_i$ est donné par l'expression : $\vec{B}_i = \vec{B}_{0i} \cos(\omega t - kx)$. En arrivant sur le conducteur parfait, il donne naissance à un champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$ tel que :

$$\vec{B}_r = \vec{B}_{0r} \cos(\omega t + kx).$$

En utilisant les équations de Maxwell, déterminer les expressions des amplitudes $\vec{B}_{0i}$ et $\vec{B}_{0r}$ des champs magnétiques incident et réfléchi en fonction de E_0 , c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

9.3/ Montrer que les expressions du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$, résultant de la superposition des champs incidents et réfléchis dans le demi-espace $x < 0$, sont les suivantes :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z.$$

Comment nomme-t-on ce type d'onde ?

10/ Charges et courants surfaciques

En utilisant les relations de continuité, montrer que la charge surfacique σ à la surface du conducteur est nécessairement nulle.

En utilisant les relations de continuité, montrer qu'il existe nécessairement une densité surfacique de courant $\vec{j}_s$ non nulle à la surface du conducteur.

Déterminer l'expression de $\vec{j}_s$ en fonction de E_0 , ϵ_0 , ω , t , c et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

11/ Pression de radiation

Les charges en mouvement à la surface du conducteur sont soumises à une force de Laplace donnée par l'expression $d\vec{F}_L = \vec{j}_S dS \wedge \vec{B}_i$, en considérant le champ incident dans le vide et au voisinage immédiat du métal.

Remarque : on a pris uniquement le champ magnétique incident $\vec{B}_i$ dans le calcul de la force de Laplace et pas le champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$. En effet, la densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ n'est pas soumise à $\vec{B}_r$ puisque c'est ce courant qui crée le champ $\vec{B}_r$.

11.1/ Déterminer l'expression de la force de Laplace $\vec{F}_L$ qui s'applique sur une surface S du conducteur. On exprimera $\vec{F}_L$ en fonction de E_0 , ϵ_0 , ω , t , S et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

11.2/ Déterminer l'expression de la pression P ainsi appliquée sur le conducteur. Exprimer P en fonction de E_0 , ϵ_0 , ω et t .

Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle P \rangle$ de la pression P .

Remarque : la pression, ainsi mise en évidence, est appelée pression de radiation.

12/ Transport d'énergie

Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$.

Quels commentaires peut-on faire par rapport à la valeur trouvée ?