Devoir surveillé 1

L'emploi des calculatrices est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'objet de ce problème est de comprendre quelques aspects physiques de l'atmosphère et des nuages. La première partie est dédiée aux ondes sonores produites par la foudre. Dans la deuxième partie, on étudie l'évolution de la pression et température dans la troposphère terrestre. D'un point de vue électromagnétique, l'atmosphère peut être vue comme une cavité résonnante, ce qui sera étudié dans la troisième partie. Le sujet se termine par une étude simplifiée des nuages et pluies acides.

Toutes les données et aides au calcul nécessaires à ce problème sont données en fin de sujet.

Première partie : Le tonnerre

1) A quel type d'onde peut-on associer le tonnerre ?

2) Qu'est-ce qu'une onde progressive ? On pourra donner un exemple.

3) On assimile localement le tonnerre à une onde plane progressive, on note $p(x,t)$ la surpression par rapport à la pression atmosphérique et v_{son}, la célérité du son dans l'air. Montrer que $p(x,t) = p_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ est solution de l'équation : $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{son}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

4) D'après la figure 1, expliquer si le tonnerre est une onde longitudinale ou une onde transversale.

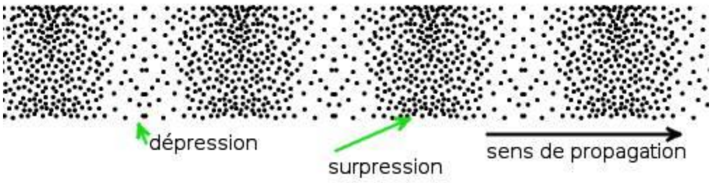

Figure 1 : répartition locale des particules au passage du tonnerre

5) On rappelle que le domaine des fréquences audibles par l'homme s'étend de $20Hz$ à $20kHz$ et que la célérité du son dans l'air vaut $v_{son} = 340 m.s^{-1}$ à la température de $20°C$. Quelles sont les longueurs d'onde correspondant à ces fréquences ?

6) Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant vos réponses.

- affirmation 1 : Une onde se propage toujours dans un milieu matériel.
- affirmation 2 : Une onde sonore peut se propager dans le vide.

Lors d'un orage, la foudre tombe à $L = 3,4km$ d'un promeneur. L'éclair et le tonnerre sont émis simultanément au moment où la foudre tombe.

7) Au bout de combien de temps le promeneur verra-t-il l'éclair ? Au bout de combien de temps entendra-t-il le tonnerre ?

8) Justifier la technique qui consiste à compter les secondes entre éclair et tonnerre et à les diviser par 3 pour obtenir la distance, en km, à laquelle la foudre est tombée.

Deuxième partie : Etude de l'atmosphère

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés thermodynamiques de l'atmosphère. Dans toute cette partie, on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On oriente l'axe des z selon la verticale ascendante.

Equilibre isotherme de l'atmosphère

On suppose d'abord dans cette partie que la température de l'atmosphère est uniforme et vaut T_0 pour tout z. On note $\rho(z)$ la masse volumique de l'air à l'altitude z. Dans la basse atmosphère (troposphère) où se développent les orages, l'air peut être assimilé à un gaz parfait.

9) Quels sont les deux principaux constituants physico-chimiques de l'air ? En quelles proportions molaires y sont-ils présents ? En ne considérant que ces deux principaux constituants de l'air, déterminer la valeur numérique de M_{air}.

Pour toutes les applications numériques qui suivent, on prendra la valeur de M_{air} donnée dans l'énoncé.

10) Démontrer la relation scalaire de la statique des fluides reliant la variation de pression dP et la variation d'altitude dz en fonction de $\rho(z)$ et g.

11) Montrer que la masse volumique $\rho(z)$ de l'air à une altitude z peut s'écrire sous la forme :

$$\rho(z) = \frac{M_{air} P(z)}{RT(z)}$$

12) Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ de l'air en fonction de l'altitude z.

13) En déduire un ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique H de l'atmosphère.

On suppose que l'ascension d'une parcelle d'air depuis la surface de la Terre à la pression P_0 et à la température T_0, jusqu'à une altitude z à la pression $P(z)$, peut être assimilée à une détente isotherme.

14) Enoncer la première loi de Joule. Que peut-on dire de la variation d'énergie interne au cours de la détente ?

15) Enoncer le premier principe de la thermodynamique pour une transformation différentielle en précisant chacun des termes entrant dans sa composition.

16) Enoncer le deuxième principe de la thermodynamique pour une transformation différentielle en précisant chacun des termes entrant dans sa composition.

17) Enoncer et démontrer la première identité thermodynamique.

18) Comment varie l'entropie de la parcelle au cours de la détente ?

Profil de température au sein d'une colonne d'air

19) D'après la figure 2, le modèle simplifié de la troposphère adopté dans les questions précédentes vous paraît-il justifié ? Dans le cas contraire, quel autre modèle relatif à la température pourrait-on employer ? Justifier.

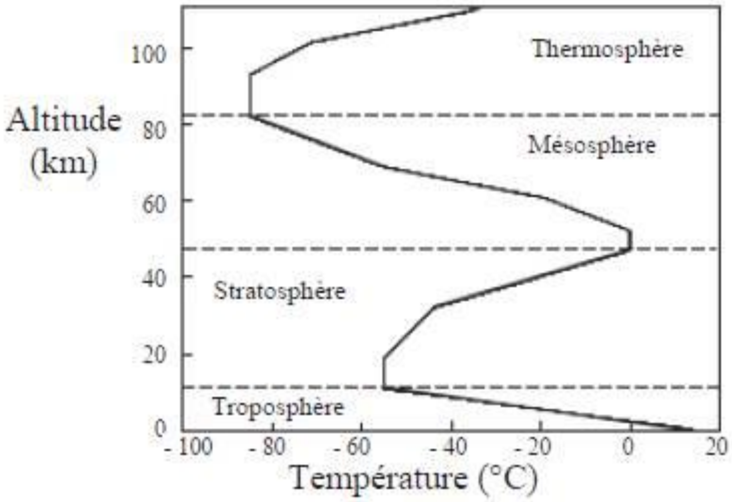

Figure 2 : Profil de température de l'atmosphère terrestre

On suppose maintenant que l'ascension d'une parcelle d'air depuis la surface de la Terre à la pression P_0 et à la température T_0, jusqu'à une altitude z à la pression $P(z)$, peut être assimilée à une détente adiabatique et mécaniquement réversible.

20) Montrer qu'une transformation adiabatique réversible est aussi isentropique.

21) Enoncer et démontrer la loi de Laplace en fonction de la température T, de la pression P et de γ tout en précisant ses hypothèses d'application.

22) En déduire la relation suivante : $\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{dT}{T}$

23) En combinant les équations obtenues précédemment, montrer qu'on obtient l'équation différentielle suivante : $\frac{dT}{dz} = -\alpha \quad avec \quad \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{M_{air} g}{R}$

Calculer α et préciser son unité.

24) On appelle T_0 la température de l'air à l'altitude $z = 0m$. Exprimer $T(z)$ en fonction de T_0, Γ et z.

25) Montrer alors que l'on peut écrire $P(z) = P_0\left(1 - \frac{\alpha}{T_0} z\right)^{\beta}$ où l'on donnera l'expression de β en fonction de H, T_0 et α. Calculer β.

26) *Résolution de problème : cette question nécessite plus de temps, le barème en tiendra compte.*

On suppose que l'épaisseur de la troposphère est constante, $z_{tr} = 12km$ et que la terre est une boule de rayon $R_t = 6400km$. Donner une estimation numérique de la masse m_{tr} de la troposphère.

Troisième partie : L'atmosphère : une cavité électromagnétique naturelle

Le comportement électromagnétique de l'atmosphère peut être modéliser par le circuit RLC série représenté sur la figure 3. On définit les quantités suivantes : la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

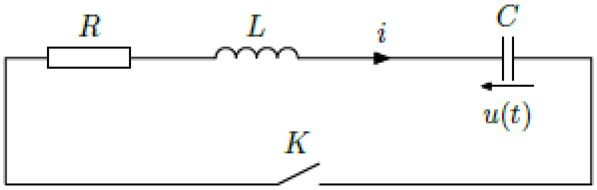

Figure 3 : Circuit RLC série

L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme l'origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t=0) = u_0$.

27) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geq 0$. On y fera apparaître ω_0 et Q. Préciser les différents régimes d'évolution possibles selon les valeurs de Q. On suppose $Q \geq 1/2$ dans la suite.

28) Etablir l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$, compte tenu des conditions initiales que vous expliciterez et justifierez.

29) Définir la pseudo-pulsation ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q. Définir aussi le temps caractéristique d'amortissement des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.

30) On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1{,}0 M\Omega$ et d'une capacité $C_0 = 11 pF$. Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :

$$L(C + C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$

31) Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

32) On définit le décrément logarithmique comme étant la quantité $d_m = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+mT)}\right)$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et m est un entier strictement positif. Exprimer d_m en fonction de m et Q.

33) On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur BF. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ? La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure 4. Exprimer le facteur de qualité Q du circuit.

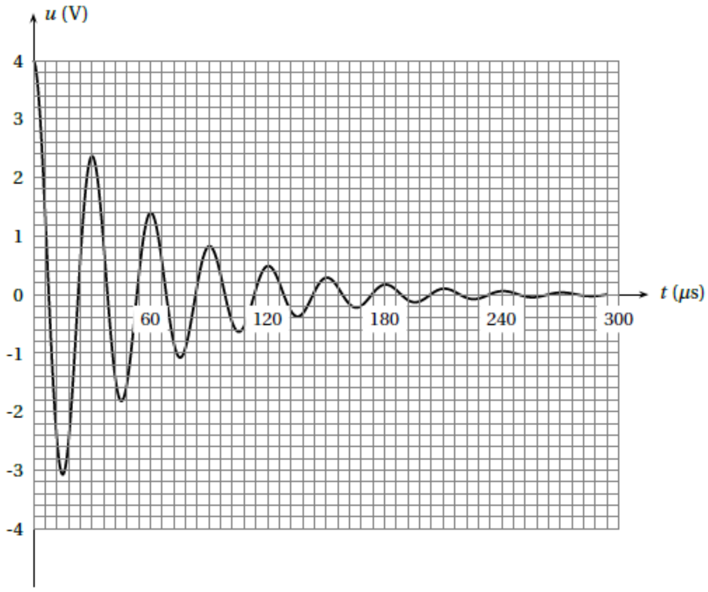

Figure 4 : Oscillations libres du circuit RLC

Quatrième partie

Stabilité d'un nuage

On cherche à comprendre dans cette partie pourquoi les gouttelettes de la partie inférieure d'un nuage ne tombent pas. On supposera dans cette partie que l'air est immobile dans le référentiel galiléen terrestre et que sa masse volumique reste constante. On considère la chute d'une gouttelette d'eau de rayon r et de masse volumique $\rho_{eau} = 10^3 kg.\mathrm{m}^{-3}$ supposée constante, située initialement à une altitude $H = 500m$ au-dessus de la surface de la Terre avec une vitesse initiale v_0 nulle. On supposera par ailleurs que la résultante des forces de frottements exercées par l'air sur la goutte suit la loi de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta_{air} r\vec{v}$, où η_{air} correspond à la viscosité dynamique de l'air et $\vec{v}$ à la vitesse de la gouttelette. On négligera la poussée d'Archimède s'exerçant sur la gouttelette.

34) Exprimer la puissance P des forces de frottement exercées par l'air.

35) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse. En déduire que la gouttelette atteint une vitesse limite : $\overrightarrow{v_{\lim}} = \frac{2r^2}{9\eta_{air}} \rho_{eau} \vec{g}$

36) Pour une gouttelette de rayon $r = 0{,}01mm$, calculer $v_{\lim}$. En supposant que cette vitesse limite est atteinte très rapidement, évaluer la durée de chute τ de cette gouttelette depuis la base du nuage à $H = 500m$ jusqu'au sol.

37) Une gouttelette de ce rayon atteint-elle réellement le sol ? Justifier que le nuage conserve son humidité.

Etude des pluies acides

Le carbone, à l'état naturel, est constitué principalement par les isotopes ${}^{12}_{6}C$ et ${}^{13}_{6}C$.

38) Que signifient l'indice 6 et l'exposant 13 relatifs à l'isotope ${}^{13}_{6}C$?

39) Combien de neutrons le noyau de l'isotope ${}^{13}_{6}C$ contient-il ?

40) En ne considérant que les deux isotopes ${}^{12}_{6}C$ et ${}^{13}_{6}C$, déduire de la masse molaire atomique du carbone à l'état naturel ($M_C = 12{,}01115 g.mol^{-1}$) sa fraction molaire en isotope ${}^{13}_{6}C$.

41) Proposer une représentation de Lewis possible pour la molécule CO_2 et les ions HCO_3^- et CO_3^{2-} sachant que l'atome de carbone est au centre de chaque édifice.

L'eau de pluie est naturellement acide : en effet, le dioxyde de carbone présent dans l'air se dissout dans l'eau pour former « l'acide carbonique » H_2CO_3, que nous noterons $\left(CO_{2(aq)} + H_2O\right)$, et donne lieu à des équilibres acido-basiques. Nous allons calculer le pH d'une eau de pluie. La teneur en CO_2 de l'air, naturellement de $0{,}03\%$, varie avec la température, la pression et le milieu (agglomération, industries, ...) et peut atteindre $0{,}10\%$.

On considère de l'eau de pluie en équilibre avec le $CO_{2(g)}$ de l'atmosphère, à 298 K, la pression totale étant de 1 bar et la pression partielle de $CO_{2(g)}$ étant $P_{CO_{2(g)}} = 35.10^{-5} bar$ (soit une teneur en CO_2 de $0{,}035\%$).

Calculer à $298K$:

42) La concentration en $CO_{2(aq)}$ dans l'eau de pluie.

43) Le pH de l'eau de pluie, en considérant que le dioxyde de carbone est le seul responsable de la valeur que prend le pH de l'eau de pluie.

Pour ce calcul, on pourra émettre l'hypothèse que l'on peut n'envisager que la première acidité de $CO_{2(aq)}$ puis on vérifiera, rapidement, cette hypothèse.

44) Comment évolue qualitativement ce pH lorsque la teneur en $CO_{2(g)}$ de l'atmosphère atteint $0{,}10\%$?

Données :

- Vitesse de la lumière dans le vide : $v_{lum} = 3.10^8 m.s^{-1}$
- Pression atmosphérique au niveau du sol : $P_0 = 1000 hPa$
- Valeur du champ de pesanteur terrestre : $g = 10 N.kg^{-1}$
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_H = 1 g.mol^{-1}$
- Masse molaire de l'oxygène : $M_O = 16 g.mol^{-1}$
- Masse molaire de l'azote : $M_N = 14 g.mol^{-1}$
- Masse molaire de l'air : $M_{air} \approx 30 g.mol^{-1}$
- Température de l'atmosphère au niveau du sol : $T_0 = 300K$
- Viscosité dynamique de l'air : $\eta_{air} \approx 2.10^{-5} Pa.s$
- Constante des gaz parfaits : $R \approx 10 J.K^{-1}.mol^{-1}$
- Coefficient isentropique : $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$

  Rapport supposé constant entre les capacités thermiques massiques à pression constante et à volume constant de l'air
- Masse molaire atomique de l'isotope ${}^{12}_{6}C$: $M_1 = 12,00000 g.mol^{-1}$
- Masse molaire atomique de l'isotope ${}^{13}_{6}C$: $M_2 = 13,00000 g.mol^{-1}$
- L'équilibre $CO_{2(g)} = CO_{2(aq)}$ a pour constante $K^0 = 3,37.10^{-2}$
- Constantes d'acidité K_a : $\left(CO_{2(aq)} + H_2O\right)/HCO_3$: $pK_{a1} = 6,4$; HCO_3^- / CO_3^{2-} : $pK_{a2} = 10,3$
- Produit ionique de l'eau K_e : $pK_e = 14$

Aide aux calculs :

$0,4/1,4 \approx 0,3$	$1/9 \approx 0,1$	$4\pi \times 193 \approx 2,4.10^3$	$12 \times (6,4)^2 \approx 5.10^2$
$3,37 \times 35 = 118$	$\ln(20) = 3$	$\sqrt{4\pi^2 + \frac{1}{4}} = 6,3$	