

# Devoir Surveillé 3

---

## **L'emploi des calculatrices est interdit.**

### **Instructions générales**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les différentes parties de ce sujet sont indépendantes. Le candidat devra les rédiger sur des feuilles séparées et traiter les questions dans l'ordre.

## Première partie : Chimie du cuivre

### Etude cristallographique du cuivre

Le cuivre comme de nombreux métaux cristallise suivant la structure cubique à face centrée.

- 1) Représenter en perspective l'allure d'une maille élémentaire.
- 2) On définit la coordinence comme le nombre de plus proches voisins d'un atome dans la maille. Préciser sa valeur dans le cadre de la structure étudiée.
- 3) Comment s'effectue le contact entre les atomes ? En déduire la relation entre le paramètre de maille  $a$  et le rayon atomique  $R$ .
- 4) Combien y a-t-il d'atomes par maille ?
- 5) On définit la compacité  $C$  par le rapport du volume occupé par les atomes de la maille sur le volume de la maille. Donner son expression littérale et l'évaluer numériquement. Est-ce une structure compacte ?
- 6) Soient  $M$  la masse molaire du cuivre,  $R$  son rayon atomique,  $N_a$  le nombre d'Avogadro et  $\rho$  la masse volumique du cuivre, déterminer la relation entre  $M$ ,  $R$ ,  $N_a$  et  $\rho$ .
- 7) Application numérique : évaluer  $M$ .

### Diagramme E-pH du cuivre

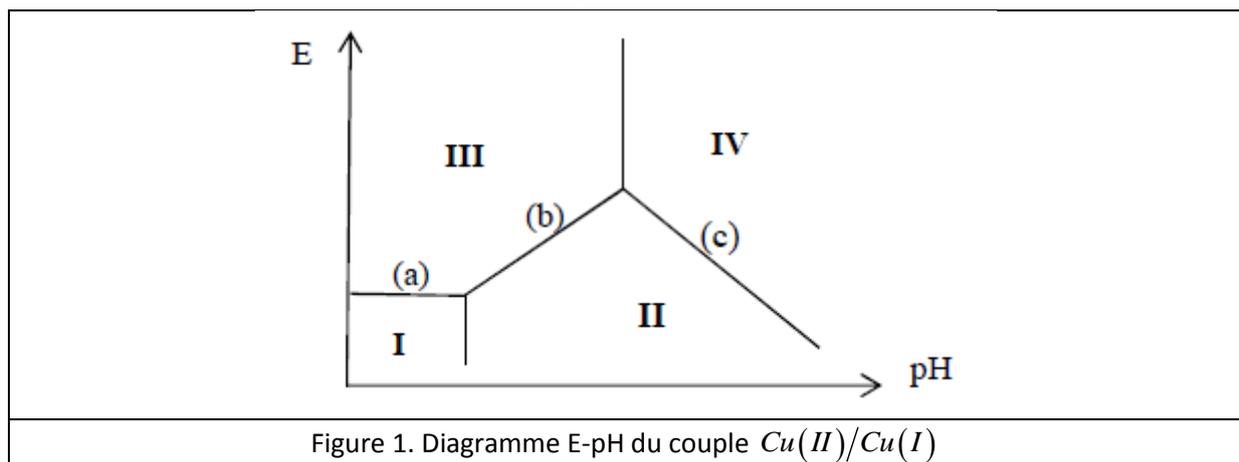
Les espèces prises en compte sont :  $\text{Cu}_{(s)}$ ,  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$ ,  $\text{Cu}^+$  et  $\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}$ . On ne tient donc pas compte du degré d'oxydation +III.

On supposera que la concentration totale en espèces dissoutes vaut  $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

- 8) Classer les espèces par degré commun d'oxydation et déterminer pour chaque degré d'oxydation les domaines de prédominance de chacune des espèces en fonction du  $pH$ . On donnera avec précision les  $pH$  délimitant les différents domaines.

### Etude du couple $\text{Cu(II)}/\text{Cu(I)}$

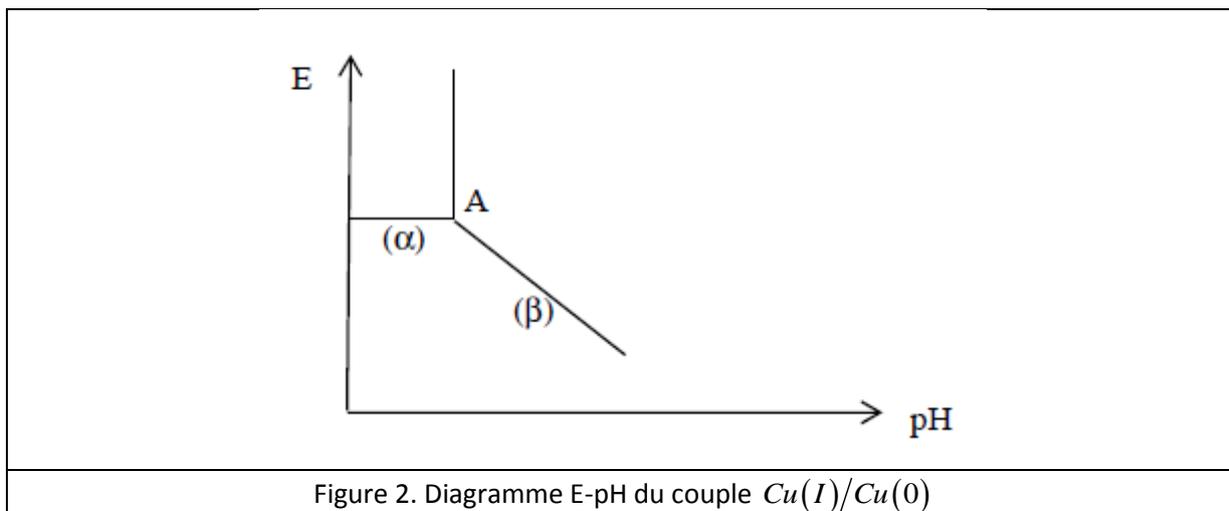
L'allure du diagramme E-pH du couple  $\text{Cu(II)}/\text{Cu(I)}$  se trouve en Figure 1.



- 9) Placer les espèces numérotées de I à IV.
  - 10) Quelle est la valeur du potentiel du segment horizontal (a) ?
  - 11) Déterminer la pente puis l'équation complète du second segment (b).
- On admettra que la pente du troisième segment (c) est de  $-0,06V / pH$ .

**Etude du couple  $Cu(I)/Cu(0)$** 

L'allure du diagramme E-pH du couple  $Cu(I)/Cu(0)$  se trouve en Figure 2.



**12)** Déterminer les coordonnées du point A ainsi que la pente du second segment ( $\beta$ ). En déduire l'équation complète du segment ( $\beta$ ).

**Diagramme E-pH provisoire**

**13)** Superposer les deux diagrammes E-pH précédents. Commenter. Préciser le pH d'intersection des segments ( $b$ ) et ( $\beta$ ).

**Diagramme E-pH du cuivre**

**14)** Déterminer le potentiel standard  $E^0(Cu^{2+}/Cu_{(s)})$  du couple  $Cu(II)/Cu(0)$ .

**15)** Donner l'équation du potentiel correspondant à la frontière  $Cu(II)/Cu(0)$  pour  $pH < 3$ . Est-il nécessaire d'étudier ce couple pour  $pH > 3$ ? Justifier.

**16)** Sur votre copie, reproduire le diagramme E-pH du cuivre fourni en Figure 3. Compléter la frontière manquante et placer les différentes espèces du cuivre. La représentation doit être claire et soignée car elle servira à nouveau par la suite.

**17)** On considère la réaction chimique :  $2Cu^+ = Cu^{2+} + Cu_{(s)}$ . Comment nomme-t-on ce type de réaction? Evaluer sa constante d'équilibre  $K_{dis}^0$ .

**Diagramme E-pH de l'eau ou de ses ions**

L'eau (ou ses ions) peut agir comme oxydant ou comme réducteur.

Dans cette partie, on supposera les pressions égales à la pression standard, soit  $P_{H_2} = P_{O_2} = P^0$  avec  $P^0 = 1\text{bar} = 10^5\text{Pa}$ .

**18)** Ecrire les deux demi-réactions d'oxydoréduction dans lesquelles interviennent les couples de l'eau. En déduire les deux équations des deux droites  $E = f(pH)$ , figurant dans le diagramme E-pH de l'eau.

**19)** Superposer le diagramme E-pH de l'eau sur le diagramme E-pH du cuivre tracé à la question 16.

**20)** Pourquoi le cuivre est-il qualifié de métal noble? Justifier son utilisation dans la marine antique (scaphandre, poulie...). Connaissez-vous d'autres métaux nobles? En citer deux.

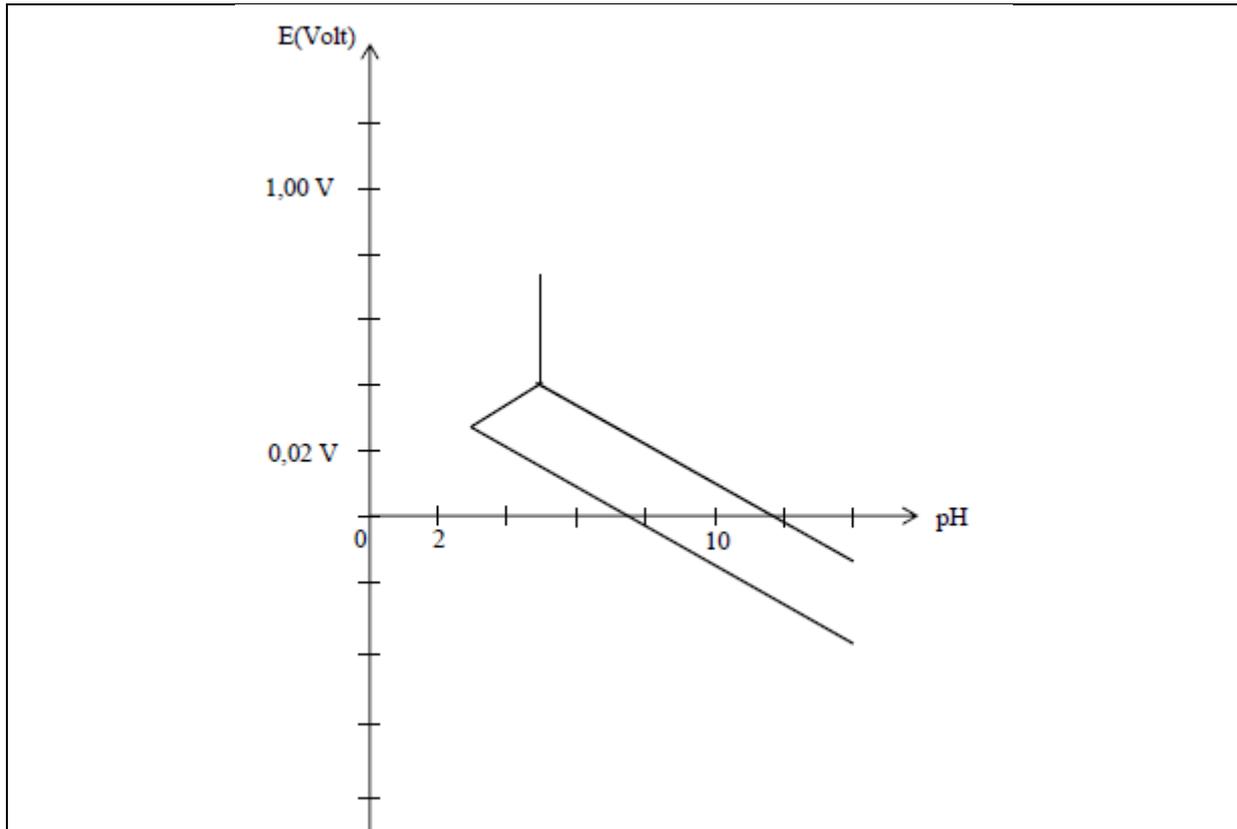


Figure 3. Diagramme E-pH du cuivre

**Données**

Constante d'Avogadro :  $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Rayon atomique du cuivre :  $R = 128 \text{ pm}$

Densité du cuivre :  $d = 8,9$

Potentiels standards à 298 K :  $E^0(\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^{2+}) = 2,3\text{V}$

$$E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = 0,16\text{V}$$

$$E^0(\text{Cu}^+/\text{Cu}) = 0,52\text{V}$$

$$E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0\text{V}$$

$$E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23\text{V}$$

Produits de solubilité :  $pK_{s1}(\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}) = 30 \quad \text{Cu}_2\text{O}_{(s)} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{Cu}^+ + 2\text{OH}^-$

$$pK_{s2}(\text{Cu}(\text{OH})_{2(s)}) = 20 \quad \text{Cu}(\text{OH})_{2(s)} = \text{Cu}^{2+} + 2\text{OH}^-$$

Produit ionique de l'eau :  $pK_e = 14$

Valeurs numériques :  $\frac{\pi}{6}\sqrt{2} = 0,74$

$$\frac{8,9 \times 8 \times 6,02 \times (1,28)^3}{\sqrt{2}} = 635$$

## Deuxième partie : Fonctionnement et technologie d'un accéléromètre

La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des capteurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques embarqués. La plupart des accéléromètres à MEMS permettent de mesurer les accélérations suivant deux axes.

En aéronautique, les accéléromètres sont utilisés en tant que tels dans les avions soumis à de fortes contraintes, avions de chasse ou de voltige, et couplés à des gyromètres ils entrent dans la composition de centrales à inertie.

Concrètement, le capteur d'un accéléromètre est réalisé à la surface d'une tranche de silicium (« wafer ») à l'aide de techniques spécifiques, tels la photolithographie et le micro-usinage de couches minces. Après réalisation, on observe par microscopie électronique que la surface du composant présente des micro-structures en silicium telles des micro-poutres, des microlamelles, etc. Les dimensions typiques des éléments de ces structures sont de 1 à 100  $\mu\text{m}$ .

Les photographies en Figure 4 montrent la « masse sismique » (la partie centrale ajourée ou « beam ») dont on étudie le mouvement et qui subit globalement les effets de l'accélération à mesurer. Celle-ci est reliée « au bâti » par des micro-poutres d'ancrage (« anchor ») pour un système un axe ou des micro-ressorts positionnés dans les coins pour un système deux axes. Ces parties flexibles gouvernent le mouvement du mobile.

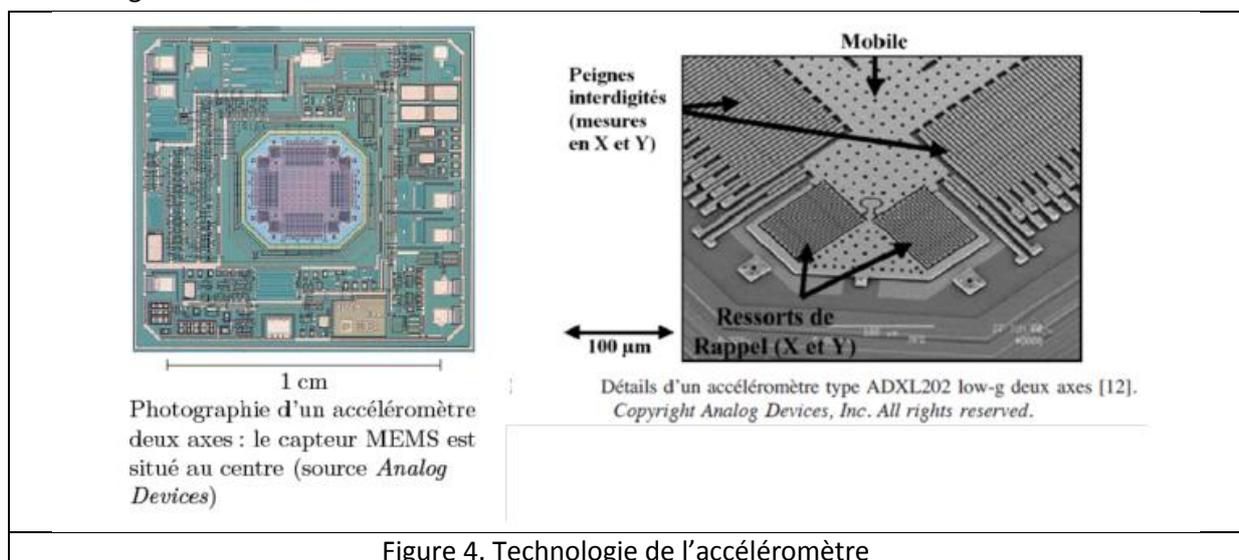
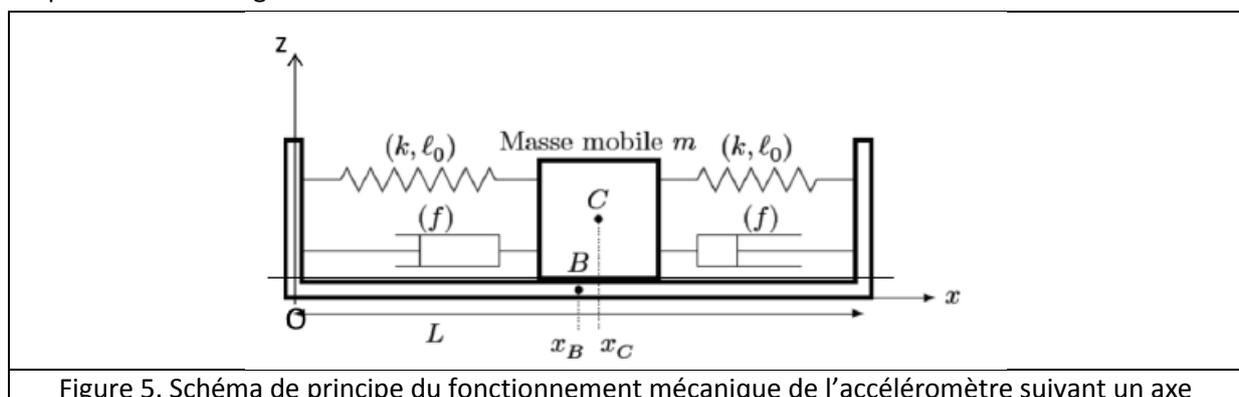


Figure 4. Technologie de l'accéléromètre

### Étude mécanique du capteur

On limite l'étude à la modélisation du fonctionnement d'un accéléromètre à un seul axe. Un accéléromètre est modélisé par un système masse-ressorts amorti, dont le schéma de principe est représenté sur la Figure 5.



On suppose que les déplacements ne s'effectuent que selon l'axe  $Ox$  horizontal.

L'accéléromètre se compose d'une masse mobile  $m$ , assimilée à un point matériel  $C$ , astreinte à se déplacer sans frottements secs selon l'axe horizontal  $Ox$ . Le boîtier rigide de l'accéléromètre, de longueur  $L$  selon l'axe  $Ox$ , de centre  $B$  se déplace dans le référentiel d'étude terrestre supposé galiléen et on note  $a$  son accélération dans ce référentiel. Son accélération s'écrit :  $\vec{a} = a\vec{u}_x = \ddot{x}_B\vec{u}_x$

On note à un instant  $t$  quelconque,  $x_C$  la position de la masse mobile en mouvement,  $x_B$  la position du centre du boîtier et  $X = x_C - x_B$  la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier. Lorsque le boîtier de l'accéléromètre est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier vérifie  $X = 0$ . Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse mobile quitte la position définie précédemment.

La masse mobile est soumise :

- aux forces de rappel  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  exercées par deux ressorts identiques, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  ;
- à des forces de frottement visqueux dont la résultante est proportionnelle à la vitesse relative de la masse mobile par rapport au boîtier  $\vec{F}_f = -f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)\vec{u}_x$ , où  $f$  est le coefficient de frottement visqueux.
- au poids  $\vec{P}$  ;
- à la réaction du boîtier  $\vec{R}$ .

### Mise en équation

**21)** Montrer que la résultante des forces de rappel exercées par les deux ressorts s'écrit  $\vec{T} = -2kX\vec{u}_x$

**22)** Montrer que, lorsque le boîtier subit une accélération, l'équation différentielle vérifiée par l'élongation  $X$  s'écrit :  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a$  avec  $\omega_0$  et  $Q$  deux constantes que l'on exprimera en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $f$ .

**23)** Quelle est la signification physique de  $\omega_0$  et  $Q$  ? Quelles sont les dimensions et les unités de ces deux grandeurs ?

### Étude de la réponse harmonique

On recherche maintenant les conditions pour lesquelles l'élongation  $X$  est directement proportionnelle à l'accélération  $a$  du boîtier. Pour cela, on étudie la réponse du capteur en régime harmonique établi.

**24)** La grandeur d'entrée du capteur étant l'accélération  $a(t) = a_m \cos \omega t$ , sous quelle forme mathématique doit-on rechercher la grandeur de sortie  $X(t)$  ?

**25)** Établir la relation entre l'amplitude complexe de l'élongation  $\underline{X}_m$  et celle de l'accélération  $\underline{a}_m$ .

**26)** Après avoir étudié le comportement asymptotique  $\frac{\underline{X}_m}{\underline{a}_m/\omega_0^2}$ , montrer qu'il existe un domaine de fréquences, que l'on précisera, pour lequel on peut considérer que l'élongation  $X$  est directement proportionnelle à l'accélération  $a$  du boîtier et vérifie :  $X(t) = -\frac{m}{2k}a(t)$

En déduire dans quel domaine de pulsation l'accéléromètre permet de mesurer effectivement une accélération.

L'amortissement de ce type d'accéléromètre étant assez faible, on peut observer un phénomène de résonance. La fréquence typique de résonance mécanique du capteur d'un accéléromètre à MEMS est de l'ordre de 5 kHz et son facteur de qualité est voisin de 5.

27) Déterminer l'expression du rapport de  $\frac{X_m}{a_m/\omega_0^2}$  en fonction de  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite,  $Q$  et  $\omega_0$ .

28) Déterminer l'expression de la fréquence  $f_r$  à laquelle se produit un phénomène de résonance. Commenter.

29) Déterminer l'ordre de grandeur de l'amplitude finale du déplacement de la masse mobile pour une accélération constante de "1 g" ( $a = g$ ), correspondant à l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, à la résonance. Commenter le résultat.

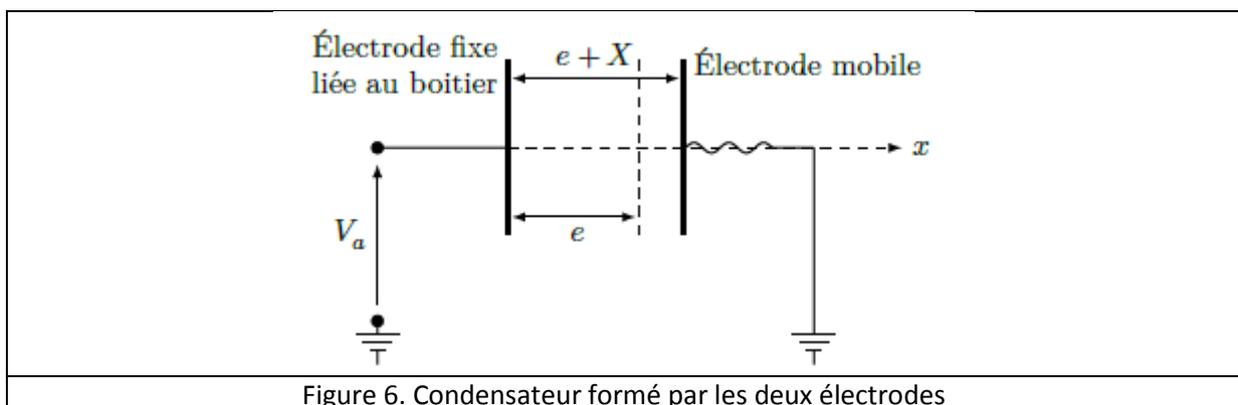
### Étude de la détection par une méthode électrostatique

On s'intéresse dans cette partie au système de détection du déplacement  $X$  de la masse mobile de l'accéléromètre pour cela on utilise un condensateur à écartement variable dont les électrodes successives sont liées alternativement à la masse mobile et au boîtier.

#### Condensateur unique

Une première méthode, dont le principe est représenté sur la Figure 6, consiste à mesurer la capacité d'un condensateur dont une électrode, liée à la masse mobile, fait face à une électrode fixe liée au boîtier de l'accéléromètre. Le déplacement de la masse mobile modifie la distance entre les deux électrodes et par voie de conséquence la capacité du condensateur.

On applique une différence de potentiel  $U$  entre les deux électrodes, l'électrode fixe étant portée au potentiel  $V_a$  et l'électrode mobile étant reliée à la masse. Les deux électrodes sont assimilées à deux plans infinis parallèles séparés d'une distance  $e + X$ . Les charges qui apparaissent sur chacune des électrodes se répartissent uniformément en surface. On note  $+\sigma$  la charge surfacique portée par l'électrode fixe liée au boîtier.



30) En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charges, préciser, en les justifiant, la direction du champ électrostatique créé par l'électrode fixe  $\vec{E}_1(M)$  et les variables dont il dépend.

**31)** Comparer les champs  $\vec{E}_1(M)$  et  $\vec{E}_1(M')$  créés par l'électrode fixe en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à l'électrode fixe.

**32)** En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}_1(M)$  créé par l'électrode fixe en tout point de l'espace.

**33)** Déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  qui règne dans le condensateur puis celle de la différence de potentiel  $U$  entre les deux électrodes en fonction de  $Q$ ,  $e$ ,  $X$ ,  $S$  et  $\epsilon_0$ .  $Q$  représente la charge portée par l'électrode fixe de surface  $S$ .

**34)** Montrer que la capacité  $C$  du condensateur s'écrit  $C = C_0 \frac{e}{e+X}$  où  $C_0$  est la capacité du condensateur pour  $X = 0$ .

**35)** Montrer que la force électrostatique  $\vec{F}$  qu'exerce l'électrode fixe sur l'électrode mobile s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_0 U^2 \frac{e}{(e+X)^2} \vec{e}_x$$

Les caractéristiques typiques d'un accéléromètre à MEMS sont  $C_0 = 0,1 \text{ pF}$ ,  $e = 1 \mu\text{m}$ ,  $V_a = 1 \text{ V}$  et la

masse mobile est de  $1 \mu\text{g}$ . On donne :  $\left(\frac{100}{102}\right)^2 \approx 0,96$

**36)** Pour  $X = 0$ , donner l'ordre de grandeur de la force électrostatique s'exerçant sur l'électrode liée à la masse mobile.

**37)** Discuter la faisabilité de réaliser une mesure capacitive du déplacement de la masse mobile d'un accéléromètre à MEMS prévu pour mesurer des accélérations de «  $1g$  » ( $a = g$ ).

### Condensateur double différentiel

Dans les accéléromètres à MEMS, la méthode de mesure consiste à déterminer le potentiel électrostatique  $V$  de l'électrode liée à la masse mobile. Le schéma de principe de la méthode de mesure est représenté Figure 7. Une seconde électrode fixe, liée au boîtier, est placée symétriquement par rapport à  $X = 0$ . La première électrode fixe est portée au potentiel  $V_a$ , la seconde au potentiel  $-V_a$ . L'électrode mobile, qui reste isolée et globalement neutre, sert alors de sonde de mesure du potentiel  $V$  qui est fonction du déplacement  $X$  de l'électrode mobile entre les deux électrodes fixes liées au boîtier.

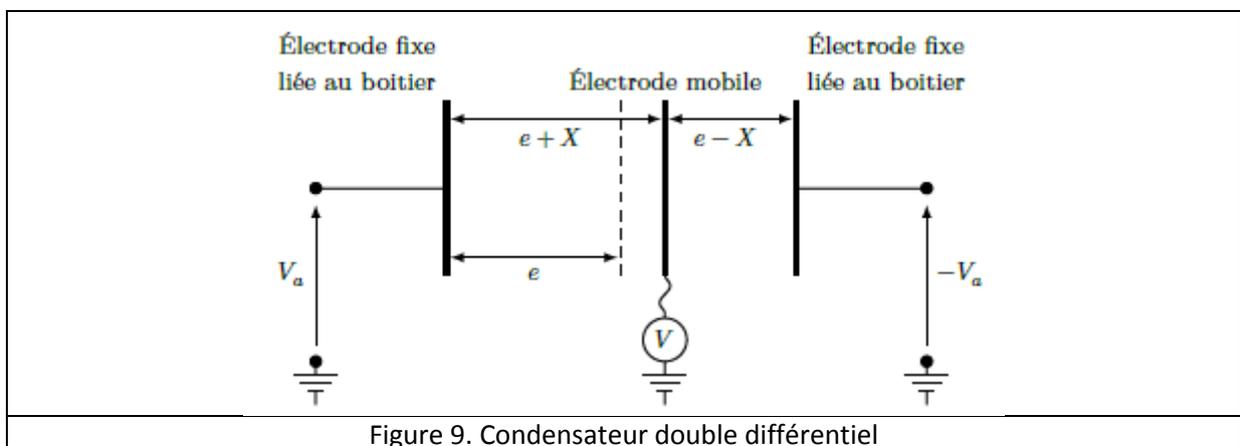


Figure 9. Condensateur double différentiel

Dans cette configuration, le potentiel  $V$  de l'électrode mobile s'écrit  $V = -V_a \frac{X}{e}$ .

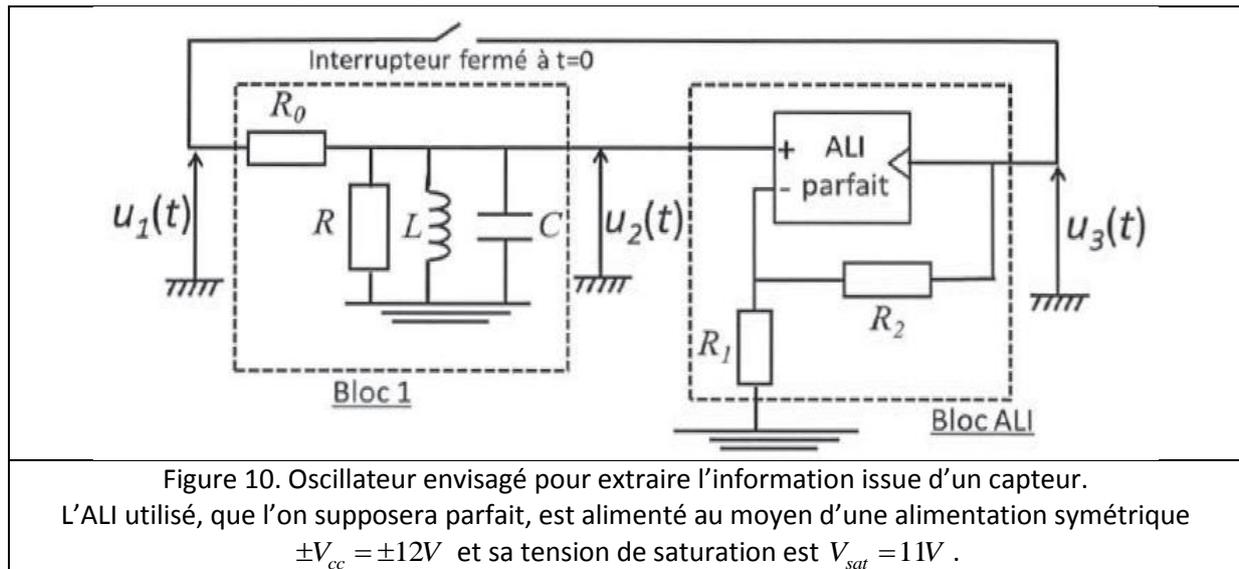
**38)** En utilisant l'expression établie en Q35, calculer la résultante des forces électrostatiques s'exerçant sur l'électrode mobile.

**39)** Conclure sur les avantages de cette méthode de mesure.

### Conditionnement des signaux par oscillateur

L'information de déplacement en provenance des capteurs capacitifs peut être extraite à partir d'un oscillateur électronique. Dans ce cas, l'information de déplacement, qui induit une modification de la capacité  $C$  est source d'une modification de la fréquence de résonance de l'oscillateur, aisément détectable, à l'aide d'un fréquencesmètre.

On considère le montage de la Figure 10.



#### Etude du bloc 1

Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec } A_0 = 0,1, Q = 25, x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

**40)** Préciser la nature de ce filtre. Exprimer  $\underline{H}$  en fonction de la valeur des composants du bloc 1 et de  $\omega$ . Par identification, donner les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de la valeur de ces composants.

#### Etude du bloc ALI

**41)** Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe :  $\underline{G} = \frac{u_3}{u_2}$ . On pose  $K = |\underline{G}|$ .

#### Systeme bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi le système bouclé.

**42)** Dédire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par  $u_3$ .

**43)** A partir de cette équation, trouver une condition liant  $A_0$  et  $K$  pour que s'établissent des oscillations quasi sinusoïdales. Déterminer alors la fréquence  $f_0$  de ces oscillations.

**44)** Montrer qu'en pratique on obtient des oscillations dont l'amplitude  $A$  varie temporellement. Exprimer et représenter  $A$  en fonction de  $t$ . Dans la pratique, on obtient une stabilisation de l'amplitude à une valeur  $A_{\max}$ . Expliquer pourquoi et expliciter  $A_{\max}$ .

**45)** Compte tenu de ce qui précède, représenter l'allure de  $u_3(t)$ .

### Détection d'un déplacement

On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements  $X$  de la partie mobile du capteur précédent dont la capacité peut être donnée par la loi  $C = C_0 \left(1 - \frac{X}{e}\right)$ , avec  $C_0 = 0,1 \text{ pF}$  et  $e = 1 \mu\text{m}$ .

Ce capteur forme le condensateur du bloc 1 de la Figure 10.

Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence  $f_{osc}$  liée à la capacité  $C$  par

la relation :  $f_{osc} = \frac{D}{\sqrt{C}}$  avec  $D = 1$ .

A la position de référence du capteur ( $X = 0$ ), la fréquence d'oscillation est  $f_{or}$ .

**46)** Montrer que, pour un petit déplacement  $X$  ( $\frac{X}{e} \ll 1$ ), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme  $f_{osc} \approx aX + b$ . Expliquer  $a$  et  $b$  en fonction des données.

**47)** On note  $\Delta f = f_{osc} - f_{or}$  la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est  $\Delta f_{\min} = 3 \text{ Hz}$ . Quel est le plus petit déplacement détectable ?

### Etude d'un capteur inductif

Cette partie demande un temps de réflexion plus important qui sera pris en compte dans la notation.

Pour des déplacements plus importants, un capteur inductif peut aussi être utilisé. Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. Le capteur est présenté en Figure 11. On admettra que :

- l'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance, l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif  $\delta$  avec  $\delta \gg 1$
- l'inductance propre du capteur peut être évaluée comme celle du résultat de la mise en série de deux solénoïdes : le premier de longueur  $x$  est rempli d'air et le deuxième de longueur  $l_0 - x$  contient le noyau.

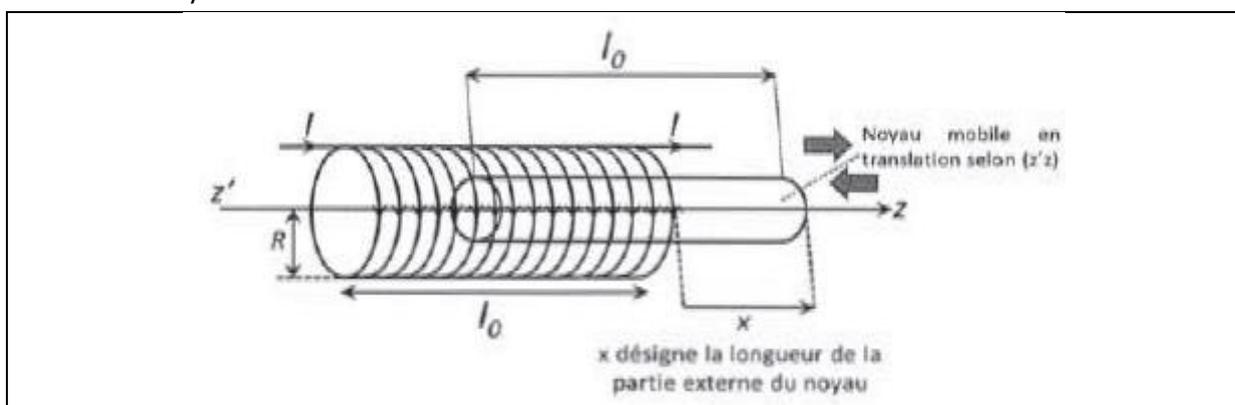


Figure 11. Capteur magnétique avec insertion d'un noyau au sein d'un solénoïde initialement rempli d'air.

**48)** Donner la variation de l'inductance propre du capteur en fonction de  $x$  pour  $0 < x < l_0$ . En déduire le fonctionnement du capteur.