6 Questions de cours

1) Donner l'expression de la différentielle de la fonction $f(x)$.

2) Donner l'expression de la dérivée de la fonction $f\left(x(t)\right)$ par rapport à t.

3) Quelle est la différence entre la notation d et la notation ∂ ? On pourra donner des exemples.

4) Donner l'expression de la différentielle de la fonction $f(x,y,z,t)$.

5) Donner le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de : $\sqrt{1+x}$ et e^x.

6) Donner le développement limité à l'ordre 1 de : $f(x)=(1+x)^\alpha$ et $g(x)=\ln(1+x)$.

7) En coordonnées cartésiennes, donner l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

8) En coordonnées cylindriques, donner l'expression du vecteur position et du vecteur déplacement élémentaire.

9) En coordonnées cartésiennes, donner les expressions des différentes surfaces élémentaires et du volume élémentaire.

10) En coordonnées cylindrique, donner les expressions des différentes surfaces élémentaires et du volume élémentaire.

7 Exercices

7.1 Fonction d'une seule variable

7.1.1 Energie interne d'un gaz parfait

On appelle transformation infinitésimale, une transformation au cours de laquelle la variation des fonctions d'état la décrivant varie très peu. Ainsi, au cours d'une transformation infinitésimale, l'énergie interne varie de dU. Or, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température. On peut alors écrire : $dU = C_V dT$.

Lors d'une transformation entre un état 1 et un état 2, la température du gaz parfait passe de T_1 à T_2. Cette transformation étant la somme de transformations infinitésimales, comment peut-on écrire ΔU, variation d'énergie interne entre ces deux états ?

On suppose que la capacité thermique à volume constant C_V du gaz parfait est constante.

7.1.2 Cinétique chimique

On s'intéresse à la réaction chimique suivante d'ordre 2 par rapport à A : $aA + bB \rightarrow cC + dD$

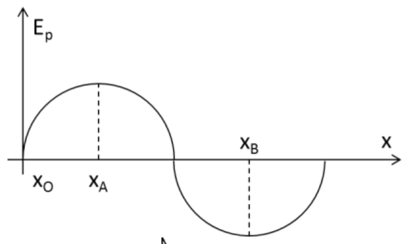
On rappelle que la vitesse volumique de réaction est définie par : $v = \dfrac{1}{V}\dfrac{d\xi}{dt}$

1) Retrouver l'équation différentielle vérifiée par la concentration $[A]$.

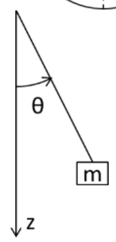
2) Exprimer alors $[A]$ en fonction du temps.

7.1.3 Stabilité d'une position d'équilibre

1) Le graphe suivant représente l'énergie potentielle d'un point M en fonction de la coordonnée cartésienne x. En $x = x_A$ et $x = x_B$, le point M passe par une position d'équilibre, la première instable, la seconde stable. Comment peut-on retrouver ces positions d'équilibres sans représentation graphique ?



2) On s'intéresse au mouvement de la masse m suspendue au bout d'un fil (cf figure). Son énergie potentielle de pesanteur peut se mettre sous la forme : $E_{pp} = -mgl\cos\theta$. En déduire alors les positions d'équilibres et leur stabilité relative. Tracer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ .



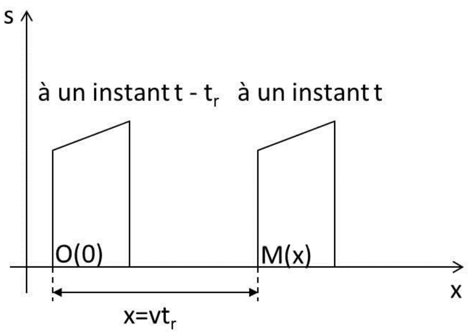
7.2 Fonctions de plusieurs variables

7.2.1 Onde plane progressive

On s'intéresse à une onde progressive $s(x,t)$ qui se propage d'un point O vers un point M de coordonnée x telle que : $s(x,t) = s(M,t) = s(O,t-t_r)$.

Cette onde se propage à une vitesse v si bien que $t_r = \dfrac{x}{v}$

Alors : $s(x,t) = s\left(0, t - \dfrac{x}{v}\right) = s\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$



1) Montrer que : $\dfrac{\partial s}{\partial x} = -\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial s}{\partial t}$

2) Montrer que $s(x,t)$ est solution de l'équation d'onde : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

7.2.2 Onde plane progressive monochromatique

1) Soit la fonction f telle que $f(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$. Quelles sont les variables de cette fonction ? Donner les expressions des dérivées partielles premières et secondes. Que remarque-t-on ?

7.2.3 Loi des gaz parfaits

On étudie un système fermé composé d'un gaz parfait.

1) Exprimer le volume en fonction de variables et de constantes que l'on identifiera.

2) Donner l'expression de la différentielle du volume, dV .

3) Le gaz parfait subit une transformation isotherme. Exprimer la variation de volume en fonction des pressions à l'état initial P_1 et final P_2 .

7.2.4 Résultante des forces de pression

Un piston comprime un fluide dans une conduite horizontale rectangulaire de hauteur H et de largeur L. On considère dans un premier temps que la pression au sein du fluide est uniforme et égale à P_1, tandis que la pression à l'extérieur du piston est égale à P_0 .

1) Quelle est la résultante des forces de pression sur le piston ?

2) On considère maintenant le cas d'un barrage vertical de hauteur H et de largeur L. Ce barrage est trop haut pour pouvoir considérer la pression uniforme dans l'eau qu'il retient. Pour un axe Oz orienté vers le haut et une origine de l'axe prise à la surface de l'eau, la pression dans l'eau varie selon : $P(z) = P_0 - \mu g z \quad pour \quad z \leq 0$.

Pour pouvoir considérer la pression au sein de l'eau comme uniforme, il faut travailler sur une surface élémentaire sur laquelle la résultante des forces de pression peut s'écrire : $\overrightarrow{dF_S} = PdS\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire orienté selon la normale extérieure à la surface.

2) Quelle est la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage ?

7.3 Les systèmes de coordonnées

1) Comment définit-on la vitesse d'un point matériel M dans le repère $\Re_{cyl}\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$? En déduire l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.

2) Dans une base cartésienne, le point M parcourt un carré de côté a. Quelle est la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour ? On posera un repère adapté (faire un dessin) et on utilisera des intégrales.

3) Dans une base cylindrique, le point M parcourt un cercle de rayon a. Quelle sera la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour (utiliser une intégrale) ? Comparer au périmètre du cercle.

4) Même question en coordonnées sphériques lorsque le point M parcourt un cercle de rayon a dans le plan Oxy.

7.4 Surfaces et volumes élémentaires

1) Retrouver l'aire d'un carré de côté a.

2) Retrouver le volume d'un parallélépipède de côté a selon x, b selon y et c selon z.

3) Retrouver l'expression de la surface latérale d'un cylindre de rayon r_0 et de hauteur h.

4) Retrouver le volume d'un cylindre de rayon r_0 et de hauteur h.

5) Que vaut l'intégrale suivante : $\iint_\Sigma dS$?

6) Quelle est la surface comprise entre deux cercles concentriques de rayons $r_0 \; et \; r_1$?

7) Retrouver le volume d'une sphère de rayon r_0.

8) Retrouver la surface d'une sphère de rayon r_0.