

# Electrostatique

## Extrait du programme

La partie **1** présente les lois quantitatives qui régissent le champ électrostatique. Les notions abordées sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ électrique et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues.

L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss (admis) pour des situations présentant un haut degré de symétrie. Une antisymétrie est la composée d'une symétrie plane et d'une opération de conjugaison de charge.

Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées.

Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme.

Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur.

Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1. Électrostatique</b>	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Notion de potentiel électrostatique.  Opérateur gradient.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Connaître l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Calculer une différence de potentiel par

	circulation du champ électrostatique dans les cas simples.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Cas de la sphère, du cylindre « infini » et du plan « infini ».	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre « infini » uniformément chargé en volume et par un plan « infini » uniformément chargé en surface. Établir et exploiter le fait qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Étude du condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentiels.	Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentiels connaissant les lignes de champ et inversement. Relier les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. <b>Approche numérique</b> : représenter des cartes de lignes de champ et d'équipotentiels.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Analogies avec la gravitation.	Transposer le théorème de Gauss au cas de la gravitation.

## Sommaire

- 1 Champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges**
  - 1.1 Charges électriques
  - 1.2 Loi de Coulomb
  - 1.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle
  - 1.4 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles
- 2 Distributions continues de charges**
  - 2.1 Distribution volumique de charges électriques
  - 2.2 Distribution surfacique de charges électriques
  - 2.3 Distribution linéique de charges électriques
  - 2.4 Calcul du champ électrostatique
- 3 Symétries et invariances du champ électrostatique**
  - 3.1 Principe de Curie
  - 3.2 Symétries de la distribution de charges
  - 3.3 Invariances de la distribution de charges
- 4 Potentiel électrostatique**
  - 4.1 Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur
  - 4.2 Circulation du champ électrostatique
  - 4.3 Potentiel créé par une distribution de charges
  - 4.4 Relation entre champ et potentiel électrostatique
- 5 Théorème de Gauss**
  - 5.1 Flux du champ électrostatique
  - 5.2 Cas d'une charge ponctuelle
  - 5.3 Théorème de Gauss
  - 5.4 Théorème de Gauss pour la gravitation
- 6 Distributions à haut degré de symétrie**
  - 6.1 Méthode de résolution
  - 6.2 Sphère uniformément chargée en volume
  - 6.3 Cylindre « infini » uniformément chargé en volume
  - 6.4 Plan « infini » uniformément chargé en surface
- 7 Étude du condensateur plan**
  - 7.1 Description
  - 7.2 Champ électrique entre les armatures
  - 7.3 Capacité du condensateur
  - 7.4 Aspect énergétique
- 8 Topographie du champ électrostatique**
  - 8.1 Définitions
  - 8.2 Propriétés
  - 8.3 Exemples

## 9 Questions de cours

- 1) Donner la loi de Coulomb en expliquant tous les termes entrant dans sa composition. Donner son analogie avec la force gravitationnelle.
- 2) Donner l'expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle. Quelle est son unité ? Comment est-elle modifiée dans le cas où la distribution de charges est composée de plusieurs charges ponctuelles ?
- 3) Donner la définition des densités volumiques, surfaciques et linéiques de charge. Pour chacune de ces distributions, donner l'expression du champ électrostatique.
- 4) Donner le principe de Curie. Définir les notions de plans de symétrie et d'anti-symétrie pour la distribution de charges. Quelle est la conséquence pour le champ électrostatique ?
- 5) Citer deux types d'invariances de la distribution de charge et leur conséquence sur le champ électrostatique.
- 6) Donner deux relations entre champ électrostatique et potentiel électrostatique. L'une utilisera une notation intégrale et l'autre locale.
- 7) Donner la valeur du potentiel électrostatique créé au point M par une distribution discrète de charges : charge ponctuelle et plusieurs charges ponctuelles ; puis, par une distribution continue de charge (3 cas).
- 8) Énoncer le théorème de Gauss. Donner son analogie pour la gravitation.
- 9) Établir l'expression du champ électrostatique créé par une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  contenant une densité volumique de charge uniforme  $\rho_0$
- 10) Redémontrer l'expression du champ électrostatique créé par un cylindre infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  contenant une densité volumique de charge uniforme  $\rho_0$
- 11) Redémontrer l'expression du champ électrostatique créé par un plan infini assimilé à  $xOy$  contenant une densité surfacique de charge uniforme  $\sigma_0$ .
- 12) Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide, le condensateur étant composé de deux plan infini chargés surfaciquement, de charges opposées.
- 13) Définir les notions suivantes : lignes de champ, tubes de champ et surfaces équipotentielles. Donnez-en quelques propriétés.
- 14) Donner l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge.

## 10 Exercices

### 10.1 Carré de 4 charges

- 1) Donner la direction du champ créé en  $O$  centre du carré de 4 charges de côté  $a\sqrt{2}$ .  
On étudiera les cas suivants :  $+q+q+q+q$ ,  $-q-q-q-q$ ,  $+q-q+q-q$ ,  $+q+q-q-q$  et  $+q+q-q+q$ .
- 2) Vérifier la direction du champ électrique donné à la question 1 par l'examen des symétries.
- 3) Calculer le potentiel créé en  $O$  centre du carré de 4 charges de côté  $a\sqrt{2}$ .
- 4) Calculer le potentiel sur l'axe dans le cas du carré de 4 charges positives, puis le champ sur l'axe.

### 10.2 Dépôt métallique

Dans un circuit électronique, une couche de cuivre d'épaisseur  $h$  de l'ordre du micromètre a la forme d'un ruban de largeur  $l=0,2mm$  et de longueur  $L=0,3cm$ . On considère que chaque atome de métal cède en moyenne un électron, devenant ainsi un ion, que l'on écrit  $Cu^+$  pour simplifier. Les

électrons ainsi libérés forment un ensemble, appelé nuage délocalisé, de densité volumique notée  $n_e$ , qui peut se mettre en mouvement pour assurer la conduction du courant électrique.

1) Rappeler l'ordre de grandeur du rayon atomique  $R_a$  et vérifier que les conditions requises pour une modélisation continue sont réunies.

2) Le Cuivre ( $Cu$ ) a une masse volumique  $\mu = 8,94.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , une masse molaire  $M = 63,5 \text{ g/mol}$ . Estimer la densité volumique  $n_i$  des ions  $Cu^+$ .

3) Quelle équation liant les densités d'électrons  $n_e$  et d'ions  $n_i$  traduit la neutralité électrique du milieu ?

### 10.3 Distributions continues de charges

1) Soit un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  chargé uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . Donner la charge totale contenue dans ce cylindre.

2) Soit une sphère de rayon  $r$  chargée uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . Donner la charge totale contenue dans cette sphère.

3) Soit deux plans parallèles infini d'équations respectives  $z = a/2$  et  $z = -a/2$ , entre lesquels se trouve une distribution volumique de charge uniforme de valeur  $\rho$ . On suppose que la distance entre les deux plans est très faible devant leur dimension latérale. Exprimer la densité surfacique de charge  $\sigma$  en fonction de  $\rho$ .

4) Soit un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  chargé uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . On suppose que le rayon  $r$  est très faible devant sa hauteur. Le cylindre peut donc être confondu avec un fil de longueur  $h$  et de densité linéique de charge  $\lambda$ . Exprimer la densité linéique de charge  $\lambda$  en fonction de  $\rho$ .

### 10.4 Symétries de la distribution de charges

1) Soit un cylindre de rayon  $a$  et de hauteur infinie chargé uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de charges. Que peut-on en déduire sur la direction du champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe du cylindre ?

2) Soit une sphère de rayon  $a$  chargée uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de charges. Que peut-on en déduire sur la direction du champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe du cylindre ?

3) Soit un plan infini chargé uniformément en surface de densité surfacique de charge  $\sigma$ . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de charges. Que peut-on en déduire sur la direction du champ électrostatique en un point  $M$  situé à une distance  $z$  du plan ?

### 10.5 Invariance de la distribution de charges

1) Soit un cylindre de rayon  $a$  et de hauteur infinie chargé uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . De quelles coordonnées dépend le champ électrostatique ?

2) Soit une sphère de rayon  $a$  chargée uniformément en volume de densité volumique de charge  $\rho$ . De quelles coordonnées dépend le champ électrostatique ?

3) Soit un plan infini chargé uniformément en surface de densité surfacique de charge  $\sigma$ . De quelles coordonnées dépend le champ électrostatique ?

### 10.6 Champ créé par un segment et un disque uniformément chargés

- 1) Calculer le champ créé par un segment de charge linéique  $\lambda$  en tout point de son plan médiateur.
- 2) Calculer le champ créé par un disque de charge surfacique  $\sigma$  en tout point de son axe.

### 10.7 Approche énergétique du potentiel électrostatique

- 1) Rappeler la définition du travail d'une force. Comment définit-on l'énergie potentielle d'une force conservative ?
- 2) Retrouver l'expression de l'énergie potentielle de la force de Coulomb en un point  $M$  de l'espace. On supposera que cette force est créée par une charge  $Q$  se situant à l'origine du repère à la distance  $r$  de  $M$ . On prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.
- 3) Par analogie, retrouver l'expression de l'énergie potentielle de la force gravitationnelle.

### 10.8 Energie mécanique d'une particule

Un électron est émis en  $O$  avec une vitesse initiale négligeable, par une électrode portée à une température élevée. Il est ensuite soumis à une champ électrostatique  $\vec{E}$ , dont le potentiel électrostatique  $V(O)$  est choisi nul au niveau de l'électrode.

- 1) Définir l'énergie mécanique de l'électron au cours de son mouvement.
- 2) Du seul point de vue énergétique, à quelle condition, sur la valeur de son potentiel  $V(P)$ , un point  $P$  peut-il être atteint par l'électron ?
- 3) Quelle est la vitesse de l'électron en sortie  $S$  de la cavité accélératrice, si la tension entre les points  $O$  et  $S$  est égale à  $U$  ?

### 10.9 Relation potentiel-champ

Dans l'espace muni d'un repère cartésien  $(O, x, y, z)$  un champ électrique est défini par son potentiel :

$$\begin{cases} V(x, y, z) = -E_0 \frac{x^2}{2a} \text{ pour } -a \leq x \leq a \\ V(x, y, z) = -E_0 x + E_0 \frac{a}{2} \text{ pour } x > a \\ V(x, y, z) = E_0 x + E_0 \frac{a}{2} \text{ pour } x < -a \end{cases} \quad \text{où } E_0 \text{ est une constante}$$

- 1) Mettre en évidence des invariances permettant d'affirmer que le champ électrique a une direction fixe.
- 2) Exprimer le champ dans les différents domaines.
- 3) Peut-on parler de champ uniforme ?

### 10.10 Cas d'une masse ponctuelle

Une masse ponctuelle  $M$  est placée à l'origine du repère, on s'intéresse au flux du champ de gravitation qu'elle crée à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

- 1) Prévoir le signe du flux sortant.
- 2) Effectuer le calcul du flux et retrouver le résultat prévu par le théorème de Gauss.

### 10.11 Différents types de condensateurs

Pour les deux types de condensateur suivants, on suppose que la charge est répartie en surface des armatures.

- 1) Calculer la capacité d'un condensateur sphérique d'armatures concentriques de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ .
- 2) Déterminer l'énergie stockée entre les armatures d'un condensateur sphérique en fonction de la charge  $Q$  portée par l'armature intérieure.
- 3) Retrouver l'expression de la capacité à l'aide de la relation  $U_E = \frac{Q^2}{2C}$ .
- 4) Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique d'armatures concentriques de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ .

### 10.12 Géométrie des lignes de champ et surfaces équipotentielles

Sans effectuer de calculs, préciser la nature géométrique des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans les cas étudiés suivants :

- 1) sphère chargée en volume
- 2) cylindre chargé en volume
- 3) plan chargé en surface

### 10.13 Lignes de champ

On donne les lignes de champ suivantes :

Préciser celles qui peuvent correspondre aux lignes de champ d'un champ électrostatique.

