Equations de Maxwell

Extrait du programme

Les équations de Maxwell sont présentées dans la partie **3**. Elles permettent une première approche quantitative du phénomène de propagation et, également, de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en première année.
Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. **Équations de Maxwell**	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents).	Comparer une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. **Approche numérique :** mettre en oeuvre une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données.

Sommaire

4 Annexe : Opérateurs différentiels

4.1 Le gradient

Définition : Le gradient permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ scalaire. En coordonnées cartésiennes :	$\overrightarrow{grad}(m)=\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z}$

Interprétation physique : Le vecteur $\overrightarrow{grad}(m)$ est normal aux surfaces de niveau ($m=cte$). Il est dirigé vers les valeurs croissantes de m.

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{a}$ est dit champ de gradient si il existe une fonction scalaire m telle que : $\vec{a}=\overrightarrow{grad}(m)$

m est appelé potentiel scalaire du champ $\vec{a}$ et est défini à une constante additive près.

Alors pour tout contour fermé, on a : $\oint_\Gamma \vec{a}.\overrightarrow{dl}=0$

Exemples :

En conduction thermique : $\overrightarrow{j_{th}}=-\lambda\overrightarrow{grad}(T)$

En électrostatique : $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V) \quad\Rightarrow\quad \oint_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl}=0$

4.2 La divergence

Définition : La divergence permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ de vecteur. En coordonnées cartésiennes :	$div\left(\vec{a}\right)=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

Interprétation physique : Le signe de la divergence de $\vec{a}$ calculée en un point est lié au caractère convergent ou divergent des lignes de champs à partir de ce point.

Exemples :

En mécanique de fluide : écoulement non divergent si $div\left(\vec{v}\right)=0$

En électrostatique : les lignes de champ électrique divergent ou convergent vers leurs sources.

Théorème de Green-Ostrogradsky : Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur $\vec{a}$. Si les dérivées partielles de $\vec{a}$ sont bornées dans V alors : $\oint\!\!\oint_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V\left(div\vec{a}\right)dV$

Interprétation physique : La divergence représente le flux sortant d'une surface fermée localement par unité de volume.

Exemples :

En mécanique de fluide : écoulement stationnaire et incompressible = non divergent : $\oint\!\!\oint_S \vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=0$

En magnétostatique : conservation du flux $\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS}=0 \quad\Rightarrow\quad (MT)\quad div\left(\vec{B}\right)=0$

En électrostatique : $\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad (MG)\quad div\left(\vec{E}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

4.3 Le rotationnel

Définition :
Le rotationnel permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Interprétation physique : Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

Moyen mnémotechnique : (en coordonnées cartésiennes) : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{b}$ est dit champ de rotationnel si il existe un vecteur $\vec{a}$ tel que : $\vec{b}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)$

$\vec{a}$ est appelé potentiel vecteur du champ $\vec{b}$ et est défini à un gradient près.

Alors pour toute surface fermée, on a : $\oiint_S \vec{b}.\overrightarrow{dS}=0$

Exemples :

En mécanique de fluide : écoulement non rotationnel si $\overrightarrow{rot}\left(\vec{v}\right)=0$

En magnétostatique : les lignes de champ magnétique tournent autour de leurs sources.

En électromagnétisme : $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) \Rightarrow \oiint_\Sigma \vec{B}.\overrightarrow{dS}=0$ *avec* $\vec{A}$ *le potentiel-vecteur (Hors programme)*

Théorème de Stokes :
Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ de vecteur $\vec{a}$, alors : $\oint_C \vec{a}\cdot\overrightarrow{dl}=\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\cdot\overrightarrow{dS}$

Interprétation physique :
Le rotationnel représente la circulation le long d'un contour fermé localement par unité de surface.
Exemples :

En électrostatique : $\oint_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl}=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=\vec{0}$

En magnétostatique : $\oint_\Gamma \vec{B}.\overrightarrow{dl}=\mu_0 I_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0\vec{j}$

4.4 Le laplacien

Définition : Le laplacien permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ scalaire. En coordonnées cartésiennes :	Le laplacien permet aussi de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur. En coordonnées cartésiennes :
$\Delta m=\left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\right)$	$\vec{\Delta}\left(\vec{a}\right)=\left(\Delta a_x\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\Delta a_y\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\Delta a_z\right)\overrightarrow{u_z}$

Interprétation physique :
L'équation de Laplace $\Delta m = 0$ traduit le fait que la solution m est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage. Par exemple, la hauteur d'une membrane attachée par son bord satisfait l'équation de Laplace. Ceci traduit le fait que la hauteur de la membrane en un point est toujours égale à la moyenne des hauteurs sur un petit cercle centré en ce point.
Exemples :
En conduction thermique : équation de la chaleur en régime stationnaire (3D)

$$\Delta T - \frac{c\mu}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = Ax + B$$

En électrostatique : équation de Laplace $\Delta V = 0$

4.5 Identités vectorielles

$$div\left(\overrightarrow{grad}(m)\right) = \Delta m$$
$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{a}\right)\right) - \vec{\Delta}\left(\vec{a}\right)$$
$$div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right) = 0$$
$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(m)\right) = \vec{0}$$

5 Questions de cours

1) Donner les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs : gradient, divergence, rotationnel et laplacien.
2) Démontrer le principe de conservation de la charge en unidimensionnel et l'énoncer en 3D.
3) Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide (nom et formulation).
4) Etablir les lois intégrales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
5) Etablir le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.
6) Ecrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
7) Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Quelle est son origine physique ?
8) Définir l'approximation des régimes quasi stationnaires. On comparera une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique. Comment se simplifie les équations de Maxwell dans un conducteur ?
9) Comment se simplifie les équations de Maxwell dans le cadre d'un régime permanent ?
10) Etablir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.

6 Exercices

6.1 Calcul d'une densité de charge

Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant au champ électrique suivant :

$$\vec{E}=E_0\frac{x}{a}\vec{u}_x \ pour\ -a\le x\le a \quad ; \quad \vec{E}=E_0\vec{u}_x\ pour\ x>a \quad ; \quad \vec{E}=-E_0\vec{u}_x \quad pour\ x<-a$$

6.2 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ $\vec{E}$ à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} E_r=E_0\dfrac{r}{r_0} \quad si \quad r\le r_0 \quad E_r=E_0\dfrac{r_0}{r} \quad si \quad r>r_0 \\ E_\theta=0 \\ E_z=0 \end{cases}$$

1) Déterminer les lignes de champ. Comment varie $\vec{E}$ le long d'une ligne de champ ?

2) Calculer $div\vec{E}$ en tout point. Pour un champ radial en coordonnées cylindriques, quelle loi de dépendant avec r permet d'assurer une divergence nulle ?

En coordonnées cylindriques : $div\vec{a}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial ra_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

3) Exprimer, par deux méthodes différentes le flux $\phi=\iint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS}$, où Σ est un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.

4) Si $\vec{E}$ est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?

5) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r}+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial ra_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$

6.3 Champ magnétostatique tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel $\vec{W}$ défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} W_r = 0 \\ W_\theta = W_0 \dfrac{r}{r_0} \quad si \quad r \leq r_0 \quad W_\theta = W_0 \dfrac{r_0}{r} \quad si \quad r > r_0 \\ W_z = 0 \end{cases}$$

1) Justifier l'appellation de champ de tourbillon.

2) Exprimer la circulation de $\vec{W}$ sur le cercle de centre O d'axe Oz et de rayon r.

3) Calculer en tout point $\overrightarrow{rot}\left(\vec{W}\right)$, puis vérifier le résultat du 2) par application du théorème de Stokes.

4) Calculer la divergence du champ en tout point.

5) Si le champ étudié ici est un champ magnétostatique : quelle est la distribution de courant correspondante ?

6.4 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}$

En déduire l'expression du champ magnétique. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.

6.5 Courants électriques et courants de déplacement

On se place dans un milieu ohmique de conductivité γ $\left(\vec{j} = \gamma\vec{E}\right)$, en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν.

1) Montrer que $\left|\vec{j}\right| > \left|\overrightarrow{j_D}\right|$ pour peu que $\nu < \nu_{max}$. Exprimer ν_{max} en fonction de ε_0 et γ.

2) Application numérique :

- dans le cas du cuivre ($\gamma = 5{,}8.10^7\, S.m^{-1}$) ;
- dans le cas de l'eau ($\gamma = 1{,}0.10^{-9}\, S.m^{-1}$).

6.6 Piège électrostatique

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

V_0 est une grandeur positive, a désigne une longueur caractéristique du problème.

1) Vérifier l'équation de Poisson.

2) Sur l'axe Ox, quelle est la loi de variation du potentiel avec l'abscisse ? Que représente la quantité $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$? Commenter son signe et comparer à celui obtenu pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

3) Déterminer le champ électrique à l'origine du repère. Si l'on place une particule de charge q_0 en ce point, est-elle en équilibre stable ?