Nom :

Interrogation de cours

1) Donner les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs : gradient, divergence, rotationnel et laplacien.

$$\overrightarrow{grad}(m)=\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z} \qquad div\left(\vec{a}\right)=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} \qquad \Delta m=\left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\right)$$

2) Démontrer le principe de conservation de la charge en unidimensionnel et l'énoncer en 3D.

Soit un fil de section Σ *et de longueur* L *selon* Ox*, représenté par un cylindre, chargé en volume* $\rho(x,t)$ *et parcouru par un courant volumique unidimensionnel* $\vec{j}=j_x(x,t)\overrightarrow{u_x}$ *. On effectue un bilan sur une portion* dx *de ce fil.*

La variation de courant entre x *et* $x+dx$ *est égale à :* $\partial I=I(x,t)-I(x+dx,t)=-\frac{\partial I}{\partial x}dx$

Courant volumique uniforme sur la section Σ *du fil :* $I(x,t)=j_x(x,t)\Sigma$ *Donc :* $\partial I=-\frac{\partial j_x}{\partial x}\Sigma dx$

Variation de courant due à un déplacement de charges entre les instants t *et* $t+dt$ *:* $\partial I=\frac{\partial Q}{\partial t}$

A l'instant t*, la charge contenue dans la section* dx *est :* $Q(x,t)=\rho(x,t)Sdx$

Ainsi : $\partial I=\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}\Sigma dx$

Alors pour un déplacement de charges unidimensionnel : $-\frac{\partial j_x}{\partial x}\Sigma dx=\frac{\partial \rho}{\partial t}\Sigma dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial j_x}{\partial x}=0$

Equation locale de conservation de la charge en 3D : $\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\vec{j}=0$

3) Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide (nom et formulation).

Maxwell-Gauss : $div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell-Thomson : $div\vec{B}=0$

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4) Pour chacune des équations énoncées ci-dessus donner sa signification et sa formulation intégrale.

Maxwell-Gauss : ***validité générale du théorème de Gauss*** $\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau$

Maxwell-Ampère : ***forme généralisée du théorème d'Ampère***

$$\oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dl}=\mu_0\iint_S\left(\vec{j}+\overrightarrow{j_D}\right).\overrightarrow{dS} \quad avec \quad \overrightarrow{j_D}=\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell-Thomson : ***caractère conservatif du flux magnétique*** $\oiint_S\vec{B}\cdot\overrightarrow{dS}=0$

Maxwell-Faraday : ***phénomène d'induction électromagnétique*** $e=\oint_C\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=-\frac{d\Phi}{dt}=\iint_S\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{dS}$