Outils mathématiques

Fonctions d'une seule variable

Considérons une fonction f dépendant d'une variable t que l'on note $f(t)$.

<u>Dérivée</u> de f par rapport à t est : $\frac{df}{dt}(t)=\lim\limits_{dt\to 0}\left(\frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}\right)$ <u>Simplification</u> : $\boxed{\frac{df}{dt}(t)=\frac{f(t+dt)-f(t)}{dt}}$

<u>Différentielle</u> de f en t : $\boxed{df(t)=f(t+dt)-f(t)}$

Soit une fonction f qui dépend d'une variable x, elle-même étant une fonction d'une variable t, $f(x(t))$.

<u>Dérivée</u> d'une fonction composée : $\boxed{\frac{df}{dt}=\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)}$

Fonctions de plusieurs variables

<u>Dérivée partielle</u> par rapport à x d'une fonction $f(x,y,z,t)$:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}=\left(\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}\right)_{y,z,t}=\frac{f(x+dx,y,z,t)-f(x,y,z,t)}{dx}}$$

<u>Différentielle</u> d'une fonction $f(x,y,z,t)$: $\boxed{df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t}dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t}dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t}dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z}dt}$

<u>Intégrale simple</u> par rapport à x : $\int f(x,y,z,t)dx$

<u>Intégrale double</u> de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x et y : $\iint f(x,y,z)dxdy$

<u>Intégrale triple</u> de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x, y et z : $\iiint f(x,y,z)dxdydz$

Développements limités

<u>Approximation linéaire</u> : développement limité à l'ordre 1 en physique ($|x-x_0|\ll 1$), ce qui donne :

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)$$

<u>Développements limités usuels en 0</u> :

$$\boxed{\begin{aligned}
&(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)\\
&\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)\\
&\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)\\
&\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\\
&e^x=1+x+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
&\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
&\sin(x)=x+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
&\tan(x)=x+\ldots+\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})
\end{aligned}}$$

Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère de centre O servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Coordonnées cartésiennes

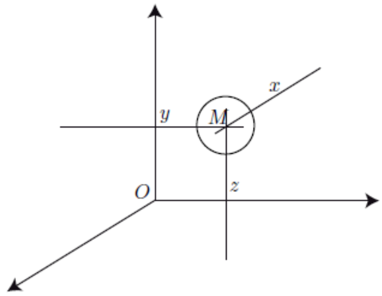
Dans le repère $\Re(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x, y, z).

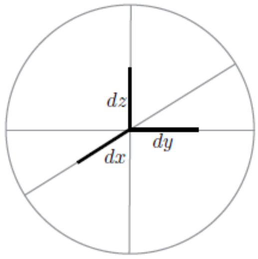
Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Re}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\Re}$$



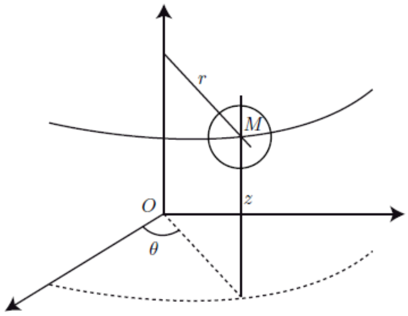


Coordonnées cylindriques

Dans le repère $\Re_{cyl}(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

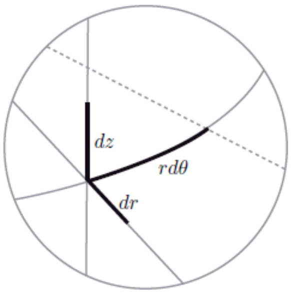
Vecteur position

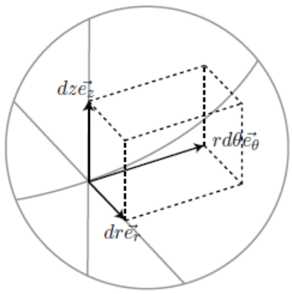
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$



Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$



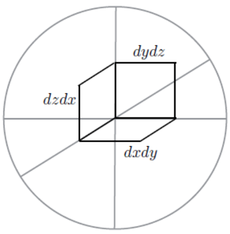


Surfaces et volumes élémentaires

Coordonnées cartésiennes

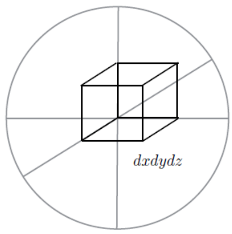
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dxdz \\ z = cte & dS = dxdy \end{cases}$$



Volume élémentaire

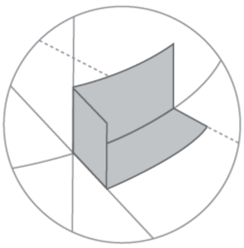
$$dV = dxdydz$$

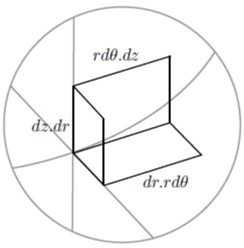


Coordonnées cylindriques

Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = rd\theta dz \\ \theta = cte & dS = drdz \\ z = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$





Volume élémentaire

$$dV = rdrd\theta dz$$