Devoir maison 21

Interférences à deux ondes cohérentes

I. Intensité lumineuse

Une source quasi-ponctuelle, située au point O, émet une onde électromagnétique monochromatique qui se propage à la vitesse c, notamment dans la direction de l'axe Oz. La source est entretenue et le régime est permanent. Au niveau de la source, le signal s'écrit : $s(O,t) = a_o \cos[\omega t - \varphi(O)]$, avec a_o l'amplitude, ω la pulsation et $\varphi(O)$ la phase en O à l'origine des temps. T et λ_o sont respectivement la période et la longueur d'onde de la radiation. En un point $M(z)$ de l'axe Oz, repéré par la variable $z = OM$, le signal s'écrit $s(M,t) = a \cos[\omega t - \varphi(M)]$ en notation réelle et $\underline{s} = a\,e^{j(\omega t - \varphi(M))}$ en notation complexe.

1. Exprimer, en fonction de $\varphi(O)$ et des données de l'énoncé, la phase $\varphi(M) = \varphi(z)$ au point M.

2. Déterminer, en fonction de a, la moyenne temporelle $< s^2(M,t) >$ de $s^2(M,t)$, carré du signal lumineux $s(M,t)$.

3. L'intensité lumineuse $I(M)$ reçue au point M s'écrit, par définition, $I(M) = \underline{s}\,.\,\underline{s}^*$ (formule qui n'est pas à redémontrer), avec $\underline{s}^*$, conjugué du complexe $\underline{s}$. Déterminer $I(M)$ en fonction de a.

II. Interférences lumineuses de deux ondes cohérentes

Soit la superposition, en un point M de l'espace, de deux ondes lumineuses monochromatiques de même pulsation ω, provenant de deux sources ponctuelles S_1 et S_2. Dans ce problème, les deux sources sont cohérentes (ou dépendantes), c'est-à-dire qu'il existe une relation de phase entre elles : $\varphi(S_2) - \varphi(S_1) = \text{constante}$ (condition nécessaire à l'existence d'interférences en M). Au point M et au temps t, les signaux lumineux s'écrivent $s_1(M,t) = a_1 \cos[\omega t - \varphi_1(M)]$ et $s_2(M,t) = a_2 \cos[\omega t - \varphi_2(M)]$ et leurs représentants complexes respectivement $\underline{s}_1 = a_1\,e^{j(\omega t - \varphi_1(M))}$ et $\underline{s}_2 = a_2\,e^{j(\omega t - \varphi_2(M))}$.

1. Sachant que $s_{tot}(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$ (et de même $\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$), exprimer l'intensité totale $I_{tot}(M)$, reçue en M, en fonction de I_1 ($= a_1^2$), I_2 ($= a_2^2$), $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$.

2. Les deux ondes ont, maintenant, la même amplitude $a_1 = a_2$ et, par voie de conséquence, les intensités associées sont identiques : $I_1 = I_2 = I_o$. Soit $\varphi(M)$ la différence de phase en M : $\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$.

a) Exprimer l'intensité $I_{tot}(M)$ en fonction de I_o et $\varphi(M)$.

b) Soit $\delta(M)$, la différence de marche (ou de chemins optiques) $\delta(M) = \mathbf{(}S_2M\mathbf{)} - \mathbf{(}S_1M\mathbf{)}$. En déduire l'expression de l'intensité totale $I_{tot}(M)$, en fonction de I_o, $\delta(M)$ et λ_o.

<u>Rappel</u> : $\varphi(M) = 2\pi \dfrac{\delta(M)}{\lambda_o}$.

c) En déduire, en fonction de λ_o, les valeurs possibles de $\delta(M)$ qui permettent des interférences constructives, c'est-à-dire des valeurs pour lesquelles $I_{tot}(M)$ est maximale (franges brillantes).

Partie C

Mesure de l'indice d'un matériau transparent

Une source ponctuelle S est placée au foyer objet F_1 d'une lentille mince convergente (**L₁**). La source émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_o. A la sortie de (**L₁**) est placé un premier écran plan opaque (**P**), perpendiculaire à l'axe optique $z'z$ de la lentille et percé de deux trous identiques S_1 et S_2 de très petites dimensions.
La lumière diffractée par ces deux pupilles, distantes de $\ell = S_1S_2$ et symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe $z'z$, est reçue par un second écran plan d'observation (**E**), parallèle au premier et situé dans le plan xOy. L'écartement ℓ de ces pupilles, situées sur une droite parallèle à l'axe Ox, est très faible devant la distance D ($\ell \ll D$) qui sépare les deux écrans (**P**) et (**E**) (figure « en perspective » **C.1**).

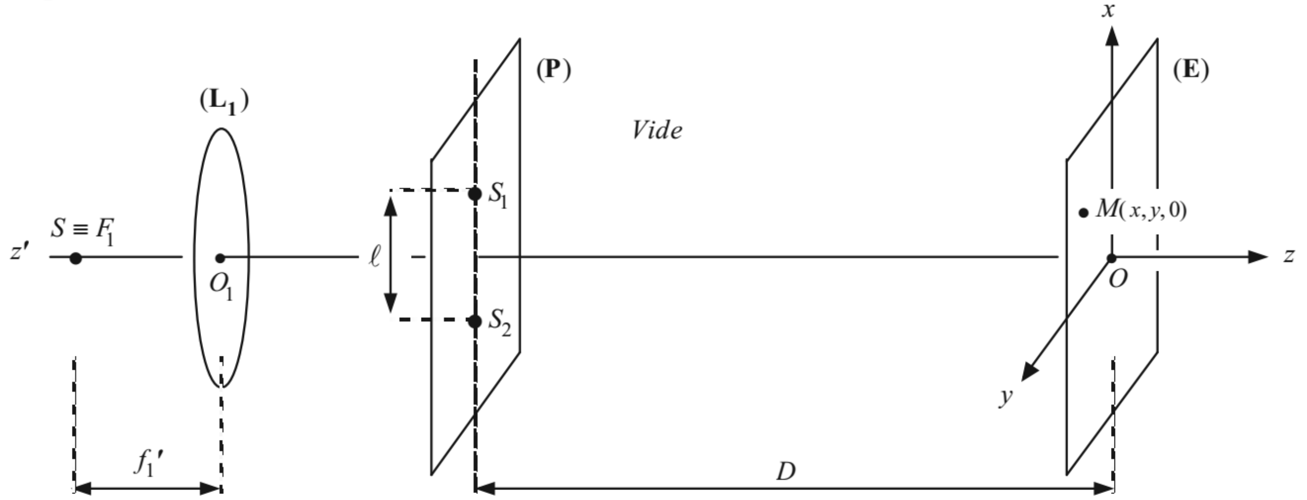

Figure **C.1**

I. Généralités

1. Recopier, sommairement, la figure **C.1** en dessinant le trajet des deux rayons lumineux, notés **(1)** et **(2)**, issus de $S \equiv F_1$, qui passent respectivement par les pupilles S_1 et S_2 et qui interfèrent au point $M(x,y,0)$ de l'écran (**E**).

2. La différence de marche (ou différence de chemins optiques), entre les rayons **(1)** et **(2)** définis précédemment (question **C.I.1**), s'écrit $\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$. Démontrer l'égalité $\delta(M) = \dfrac{\ell\, x}{D}$, formule qui relie $\delta(M)$ à x, la méthode de résolution étant laissée au choix du candidat.
3. Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles les interférences sont constructives, c'est-à-dire les valeurs de x correspondant à des points de (**E**) qui reçoivent une intensité lumineuse maximale.
4. Préciser la forme géométrique des franges brillantes.
5. Quelle est, en un point M_{fcb} de la frange centrale brillante (f.c.b.), la valeur caractéristique de la différence de marche $\delta(M_{fcb})$?
6. Donner, en fonction de ℓ, D et λ_o, l'expression de l'interfrange i, distance entre deux franges brillantes consécutives.

7. La longueur de cohérence d_{lim} (grandeur positive) est la différence de marche limite, ou maximale, au-delà de laquelle le phénomène d'interférences n'existe plus. Deux trains d'onde, émis au même instant par la source S et passant respectivement par S_1 et S_2, ne se croisent en M, donc interfèrent en ce point, que si $|\delta(M)| \leq d_{lim}$. En déduire, en fonction de ℓ, D et d_{lim}, l'étendue $\Delta x = x_{max} - x_{min}$ du champ d'interférences sur l'écran (**E**).

8. Application numérique : $\ell = 8{,}00 \times 10^{-3}$ m ; $\lambda_o = 6{,}00 \times 10^{-7}$ m ; $D = 1{,}00$ m ; $d_{lim} = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m.

   Calculer i et Δx.

II. Détermination de l'indice *n* d'une lame transparente

Devant la pupille S_2, est placée une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice absolu $n > n_o = 1$, transparente, homogène et isotrope (figure **C.2**).

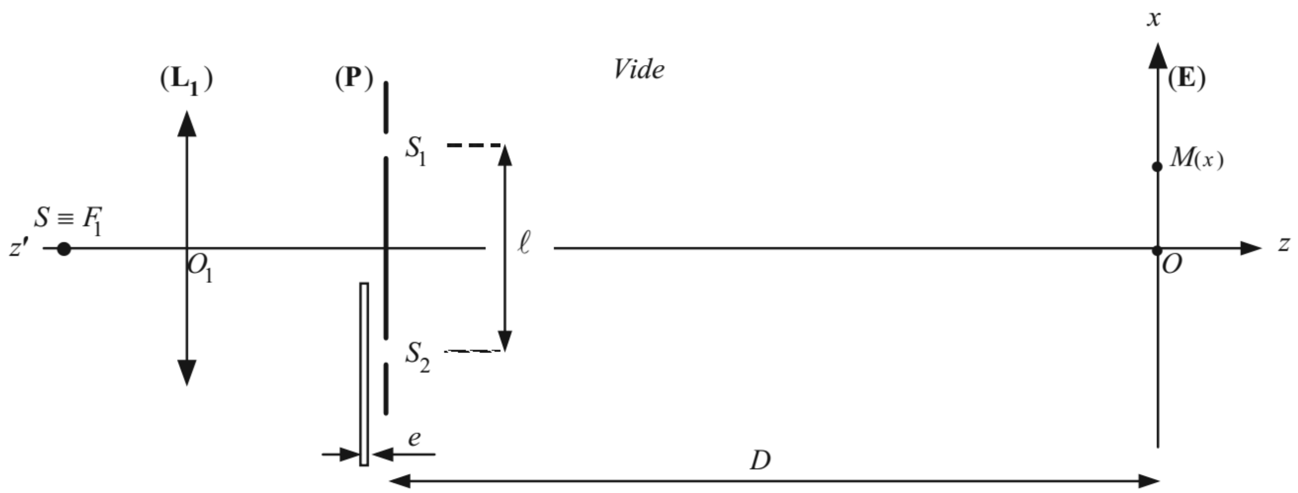

Figure **C.2**

1. Exprimer la nouvelle différence de marche $\delta'(M) = (SM)_2 - (SM)_1$, en fonction de ℓ, D, n, e et x.

2. Avant l'adjonction de la plaque de verre (figure **C.1**, page 5), la frange centrale brillante était en $x = 0$. Après installation de la lamelle (figure **C.2**), la frange centrale brillante se déplace en $x_{fcb} \neq 0$. Dans quel sens s'est déplacée cette frange (vers les x positifs ou vers les x négatifs) ?

3. Application numérique : $\ell = 8{,}00 \times 10^{-3}$ m ; $D = 1{,}00$ m ; $e = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m ; $|x_{fcb}| = 1{,}20 \times 10^{-1}$ m.

   Calculer n.