Devoir maison 5

On étudie une pièce parallépipédique de longueur $a=8m$, de largeur $b=5m$, de hauteur $h=2{,}5m$ et possédant un radiateur électrique de puissance maximale $P=2kW$. On souhaite connaître les variations de températures dans cette pièce en fonction de l'isolation de ses murs. Dans l'ensemble du problème, la pièce sera supposée parfaitement isolée au niveau du sol et du plafond. Sa température initiale est T_{int} et sa température au cours du temps est $T(t)$. La température extérieure est T_{ext}. On notera aussi $T_{moy}(t)$ la température moyenne du mur en son centre.

1 Modélisation électrique du chauffage d'une maison

On modélise l'ensemble du système, composé de la pièce, du mur et du radiateur, par un réseau électrique. Le but est d'étudier le comportement dynamique de ce système via sa fonction de transfert.

1.1 Circuit électrique

Dans l'approche électrique, la modélisation du système conduit au circuit électrique donné figure 1 avec les analogies données dans le document 1.

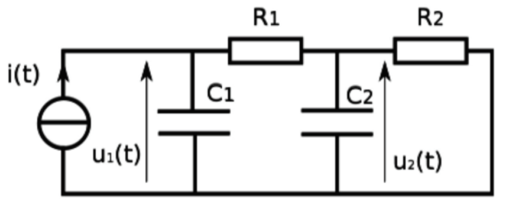

Figure 1. Modèle électrique

Thermique	Electrique
Radiateur de puissance P	Générateur de courant $i(t)$
Capacité thermique de la pièce C	Condensateur C_1
Résistance thermique de la moitié intérieure du mur $\frac{R_{mur}}{2}$	Résistance R_1
Capacité thermique du mur C_{mur}	Condensateur C_2
Résistance thermique de la moitié extérieure du mur $\frac{R_{mur}}{2}$	Résistance R_2
$T(t)-T_{ext}$	$u_1(t)$
$T_{moy}(t)-T_{ext}$	$u_2(t)$

Document 1. Analogies entre grandeurs électriques et thermiques

1) Que devient ce circuit électrique en régime permanent continu ? Exprimer alors la tension $u_1(t\to\infty)$.

1.2 Régime sinusoïdal permanent

Afin d'étudier le comportement du circuit en régime variable, on se place en régime sinusoïdal forcé $x(t)$ de pulsation ω dont la grandeur complexe associée est notée $\underline{x}(t)$ et l'amplitude complexe est $\underline{X}$ avec :

$$x(t)=X_0\cos(\omega t+\phi)=\mathrm{Re}(\underline{x}(t))$$
$$\underline{x}(t)=X_0e^{j(\omega t+\phi)}=\underline{X}e^{j(\omega t)}$$
$$\underline{X}=X_0e^{j(\phi)}$$

La référence de phase sera prise sur la grandeur $i(t)$ délivrée par le générateur de courant : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$

2) Exprimer l'impédance $\underline{Z_2}$ relative à l'association de la résistance R_2 avec le condensateur de capacité C_2.

3) Exprimer l'impédance $\underline{Z_1}$ relative à l'association de la résistance R_1 avec l'impédance $\underline{Z_2}$.

4) Exprimer le lien entre $\underline{i}(t)$, $\underline{u_1}(t)$, $\underline{Z_1}$, C_1 et ω.

On en déduit la relation reliant $\underline{U_1}(j\omega)$ *à* I_0 *donnée par :*

$$\boxed{\underline{U_1}(j\omega) = \frac{1 + j\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C_2\omega}{1 + j\left((R_1+R_2)C_1 + R_2C_2\right)\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}(R_1+R_2)I_0}$$

5) Exprimer en fonction des données, $\underline{U_{10}}$, la valeur de $\underline{U_1}(j\omega)$ pour $\omega = 0$.

6) On définit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U_1}(j\omega)}{\underline{U_{10}}}$. Quelle est la nature du filtre réalisé ?

Dans le cas où $R_1 = R_2 = \dfrac{R}{2}$, $C_2 = \alpha C_1 = \alpha C$, *la fonction de transfert* $\underline{H}(j\omega)$ *se met sous la forme :*

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\dfrac{\alpha RC}{4}\omega}{1 + j\left(1 + \dfrac{\alpha}{2}\right)RC\omega - \dfrac{\alpha R^2C^2}{4}\omega^2}}$$

1.3 Diagramme de Bode

7) Etablir les expressions des asymptotes de $G_{dB} = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right)$ en basse fréquence et haute fréquence. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en précisant bien le point d'intersection.

En pratique, pour $\alpha = 200$, on obtient le diagramme de Bode de la figure 2.

8) Définir la pulsation de coupure du filtre et donner sa valeur. Estimer la durée τ du régime transitoire.

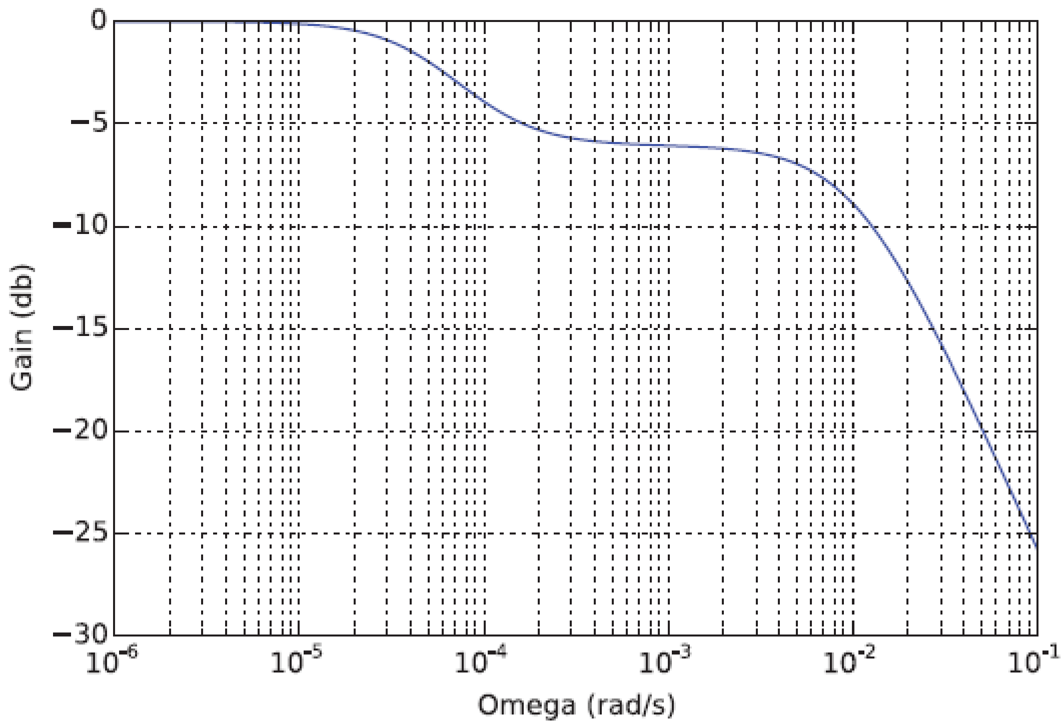

Figure 2. Diagramme de Bode sans isolation

2 Commande du chauffage

En observant le comportement du filtre précédent en hautes fréquences, on peut s'apercevoir que : $\underline{U_1}(\omega \to \infty) \to 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{int}} = T_{ext}$

En effet, si le chauffage chauffe et refroidit de manière trop rapide, la température de la pièce n'a pas le temps de chauffer. Il est donc préférable de piloter le chauffage en imposant deux seuils de température. On installe donc un capteur de température qui pilotera le chauffage. Si la température est inférieure à une valeur T_-, le chauffage se met en route. Si la température est supérieure à une valeur T_+, le chauffage s'éteint. On prendra : $T_+ - T_- = 4°C$

La comparaison est réalisée à l'aide d'un comparateur à hystérésis.

9) Expliquer le fonctionnement d'un comparateur à hystérésis. Pourquoi ne pas utiliser un comparateur simple ?

Le comparateur à hystérésis choisi est représenté en figure 3. La sonde délivre une tension proportionnelle à la température telle que : $e(t) = 0{,}1T(t)$. E est une tension de référence, à régler en fonction des seuils de température voulus.

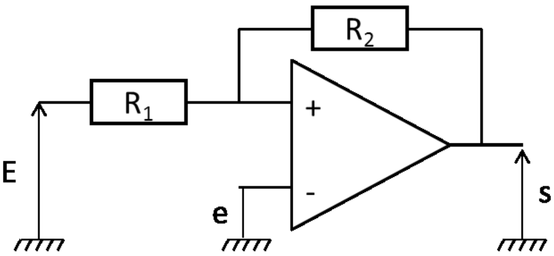

Figure 3. Comparateur à hystérésis.

10) Tracer la caractéristique entrée-sortie d'un ALI (amplificateur linéaire intégré) regroupant les différents régimes de fonctionnement que l'on commentera. Dans quel régime l'ALI de la figure 8 fonctionne-t-il ?

11) On suppose l'ALI idéal. Exprimer les tensions de seuil E_+ et E_- en fonction de E, R_1 et R_2, tensions pour lesquelles le signal de sortie bascule de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$ et inversement. Tracer la caractéristique entrée-sortie $s = f(e)$ du comparateur donné en figure 3. On fera apparaître les tensions de seuil. Les tensions de saturations sont égales à $\pm 15V$.

12) On pose : $R_1 = 1k\Omega$. En déduire la valeur de R_2 et E.

13) En pratique, le capteur situé dans la sonde ne délivre qu'une tension très faible, qu'il convient d'amplifier. Le facteur d'amplification recherché est de 100. Proposer un montage à base d'ALI capable de réaliser une telle fonction (schéma, fonction de transfert, valeur des composants).