

# Outils mathématiques

## Fonctions d'une seule variable

Considérons une fonction  $f$  dépendant d'une variable  $t$  que l'on note  $f(t)$ .

Dérivée de  $f$  par rapport à  $t$  est :  $\frac{df}{dt}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \right)$     **Simplification** :  $\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$

Différentielle de  $f$  en  $t$  :  $df(t) = f(t+dt) - f(t)$

Soit une fonction  $f$  qui dépend d'une variable  $x$ , elle-même étant une fonction d'une variable  $t$ ,  $f(x(t))$ .

Dérivée d'une fonction composée :  $\frac{df}{dt} = \left( \frac{df}{dx} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)$

## Fonctions de plusieurs variables

Dérivée partielle par rapport à  $x$  d'une fonction  $f(x, y, z, t)$  :

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} = \left( \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{y, z, t} = \frac{f(x+dx, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{dx}$$

Différentielle d'une fonction  $f(x, y, z, t)$  :  $df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y, z, t} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x, z, t} dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x, y, t} dz + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x, y, z} dt$

Intégrale simple par rapport à  $x$  :  $\int f(x, y, z, t) dx$

Intégrale double de la fonction  $f(x, y, z)$  par rapport à  $x$  et  $y$  :  $\iint f(x, y, z) dx dy$

Intégrale triple de la fonction  $f(x, y, z)$  par rapport à  $x, y$  et  $z$  :  $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$

## Développements limités

Approximation linéaire : développement limité à l'ordre 1 en physique ( $|x - x_0| \ll 1$ ), ce qui donne :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx}(x_0)$$

Développements limités usuels en 0 :

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ e^x &= 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin(x) &= x + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \tan(x) &= x + \dots + \frac{B_{2n} (-4)^n (1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

## Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère de centre  $O$  servant à définir ce référentiel. La position d'un point  $M$  est définie à un instant  $t$  par le vecteur position :  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ .

### Coordonnées cartésiennes

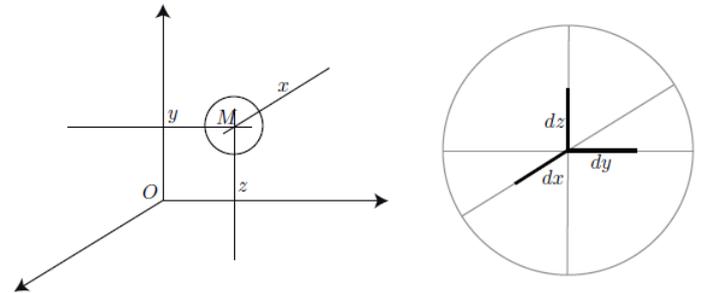
Dans le repère  $\mathfrak{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , on utilise les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}}$$



### Coordonnées cylindriques

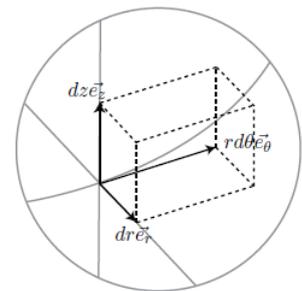
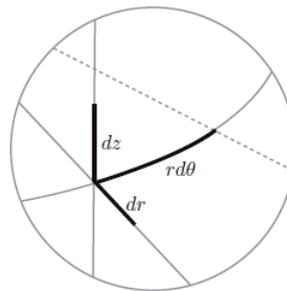
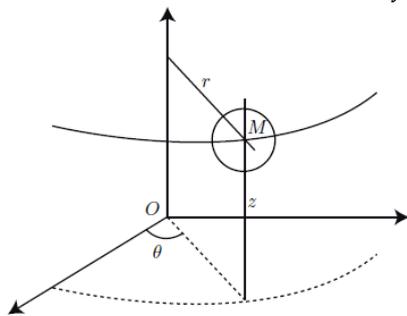
Dans le repère  $\mathfrak{R}_{cyl}(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , on utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}_{cyl}}$$

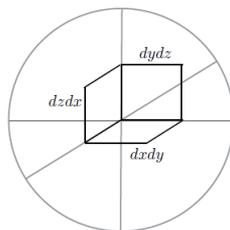


## Surfaces et volumes élémentaires

### Coordonnées cartésiennes

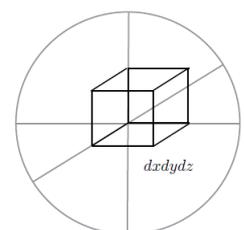
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dx dz \\ z = cte & dS = dx dy \end{cases}$$



Volume élémentaire

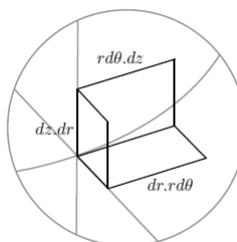
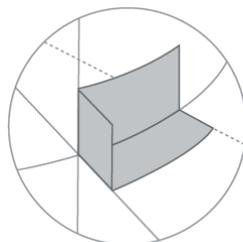
$$dV = dx dy dz$$



### Coordonnées cylindriques

Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r d\theta dz \\ \theta = cte & dS = dr dz \\ z = cte & dS = r dr d\theta \end{cases}$$



Volume élémentaire

$$dV = r dr d\theta dz$$

