Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen

Extrait du programme

La partie **1** introduit sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen.	
Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $dp/dz = - \mu g$.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Comparer les variations de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère modélisés.

Sommaire

1 Forces au sein d'un fluide au repos
- **1.1 Définition de l'échelle**
- **1.2 Définition du système**
- **1.3 Bilan des forces**

2 Relation de statique des fluides
- **2.1 Principe fondamental de la dynamique**
- **2.2 Relation de statique des fluides**

3 Exercices de cours
- **3.1 Cas d'un fluide incompressible et homogène**
- **3.2 Cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait**
- **3.3 Comparaison des deux modèles**

4 Questions de cours

5 Questions à choix multiples

6 Exercices Terminale STI2D

7 Exercices type écrit (à faire en DM pour le 19/09/2018)
- **7.1 Plongée sous-marine**
- **7.2 L'influence de la concentration en dioxyde de carbone**

8 Exercices type oral
- **8.1 Baromètre de Torricelli**
- **8.2 Tube en U contenant deux liquides**
- **8.3 Modèles d'atmosphère**

3 Exercices de cours

3.1 Cas d'un fluide incompressible et homogène

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilisera une base cartésienne. L'accélération de la pesanteur est supposée uniforme et vaut : $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$.

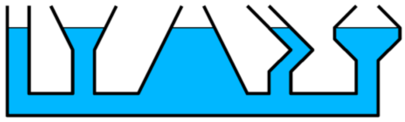
1) Définir les termes « fluide incompressible » et « fluide homogène ». Donner un exemple.

2) En partant de la relation fondamentale de la statique des fluides, montrer que, dans un fluide incompressible et homogène, la variation de pression entre deux points A et B, $P(B) - P(A)$, est proportionnelle à la différence de hauteur entre ces deux même points, $z(B) - z(A)$.

3) On souhaite ainsi modéliser la variation de pression dans le cas de l'océan. On choisit l'origine de l'axe Oz à la surface de l'eau et on note la pression P_{atm}. Montrer que la pression varie selon : $P(z) = P_{atm} - \mu g z \quad pour \quad z \leq 0$.

4) Commenter l'expression précédente. On pourra notamment calculer la pression à 10m de profondeur.

5) Expliquer le principe des vases communicants. Dans ces vases reliés entre eux mais de taille et formes différentes, on peut remarquer que la hauteur du liquide est la même dans tous les vases.



3.2 Cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilisera une base cartésienne. L'accélération de la pesanteur est supposée uniforme et vaut : $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$. On note la pression à l'altitude $z = 0$, P_{atm}.

1) Définir les termes « atmosphère isotherme », « gaz parfait » et « fluide compressible ». Donner un exemple.

2) En partant de la relation des gaz parfaits, relier la masse volumique μ du gaz parfait et sa pression P.

3) Intégrer la relation fondamentale de la statique des fluides entre l'altitude $z = 0$ et l'altitude z. Montrer que la variation de pression varie de manière exponentielle avec l'altitude selon : $P(z) = P_{atm} \exp\left(-\dfrac{z}{H}\right) \quad avec \quad H = \dfrac{RT_0}{Mg}$.

On précisera la dimension de la grandeur H.

4) Commenter l'expression précédente. On pourra notamment calculer la pression à $z = 3H$.

3.3 Comparaison des deux modèles

Dans le cas d'un fluide incompressible, la dépendance avec l'altitude est linéaire. Dans le cas d'un fluide compressible et isotherme, la dépendance avec l'altitude est exponentielle.

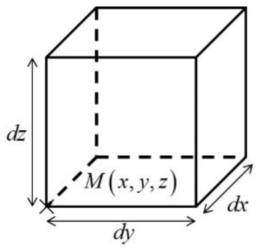
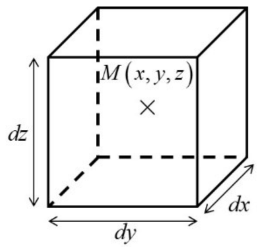
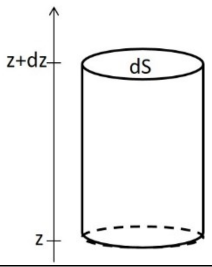
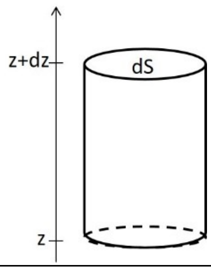
1) Pour des altitudes (ou profondeur) très faibles, comparer les deux expressions obtenues précédemment.

4 Questions de cours

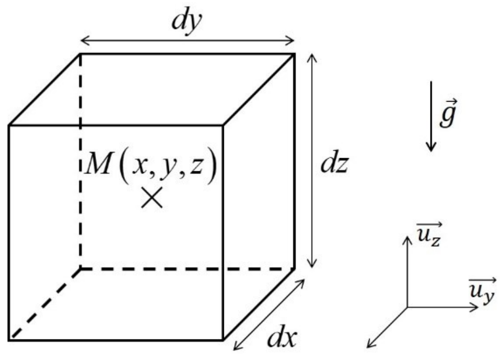
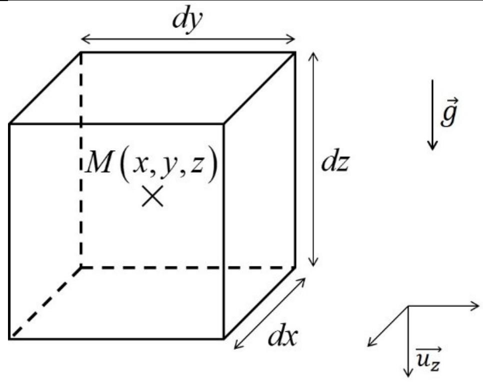
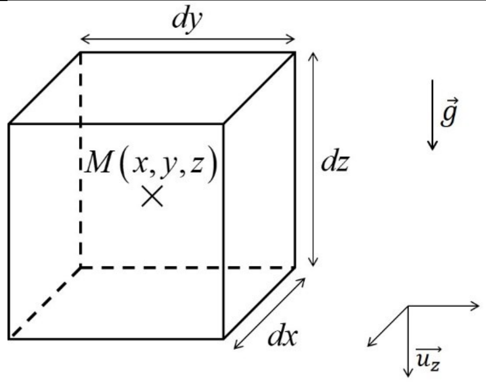
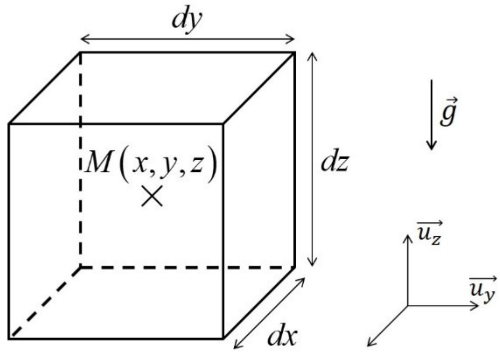
1) Exprimer la densité volumique de forces de pesanteur.
2) Exprimer la densité surfacique de forces de pression.
3) Démontrer la relation de la statique des fluides. On considèrera une particule de fluide de volume $dV = dxdydz$ et l'axe (Oz) ascendant.
4) Démontrer la relation de la statique des fluides. On considèrera une particule de fluide de volume $dV = dxdydz$ et l'axe (Oz) descendant.
5) Démontrer la relation de la statique des fluides. On considèrera une particule de fluide de volume $dV = rdrd\theta dz$ et l'axe (Oz) ascendant.
6) Démontrer la relation de la statique des fluides. On considèrera une particule de fluide de volume $dV = rdrd\theta dz$ et l'axe (Oz) descendant.
7) Retrouver l'évolution de la pression dans le cas d'un fluide incompressible et homogène, l'axe (Oz) étant ascendant.
8) Retrouver l'évolution de la pression dans le cas d'un fluide incompressible et homogène, l'axe (Oz) étant descendant.
9) Redémontrer la loi de pression en fonction de l'altitude dans le cas d'une atmosphère isotherme à la température T_0. L'atmosphère peut être considérée comme un gaz parfait. La pression au niveau du sol est notée P_0. On introduira une hauteur caractéristique H du phénomène que l'on précisera.
10) Définir les trois échelles que l'on rencontre dans la cadre du cours de thermodynamique.

5 Questions à choix multiples

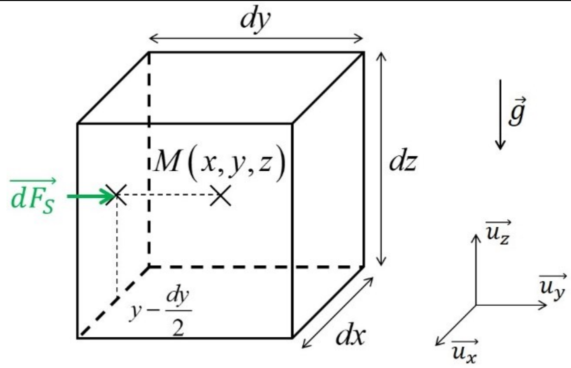
1) Pour les particules de fluide représentées ci-dessous, trouver le(s) cas où le volume élémentaire est juste.

A		C	
	$dV = dydxdz$		$dV = xyz$
B		D	
	$dV = dSdz$		$dV = zdS$

2) Retrouver la(les) bonne(s) expressions de la force de pesanteur s'appliquant sur les particules de fluide considérées de masse volumique μ.

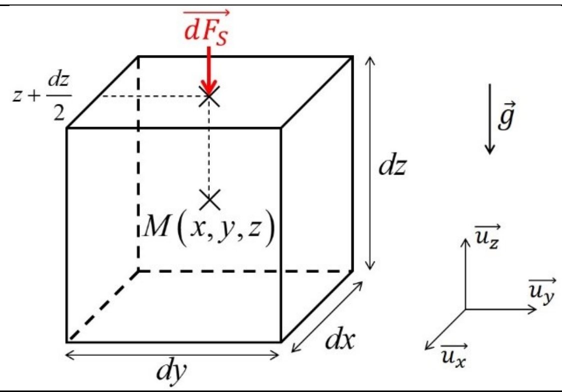
A	 $\vec{P} = m\vec{g}$	C	 $\overrightarrow{dF} = \mu dV g\overrightarrow{u_z}$
B	 $\overrightarrow{dF} = \mu dV \vec{g}$	D	 $\overrightarrow{dF} = \mu dV g\overrightarrow{u_z}$

3) Retrouver la(les) bonne(s) expressions de la force de pression représentée s'appliquant sur la particule de fluide considérée.



A	$\overrightarrow{dF_S} = P\left(x, y - \dfrac{dy}{2}, z\right) dxdz\overrightarrow{u_y}$	C	$\overrightarrow{dF_S} = P\left(x, y - \dfrac{dy}{2}, z\right) dxdy\overrightarrow{u_y}$
B	$\overrightarrow{dF_S} = -P\left(x, y - \dfrac{dy}{2}, z\right) dxdz\overrightarrow{u_y}$	D	$\overrightarrow{dF_S} = P(x, y, z) dxdz\overrightarrow{u_y}$

4) Retrouver la(les) bonne(s) expressions de la force de pression représentée s'appliquant sur la particule de fluide considérée.

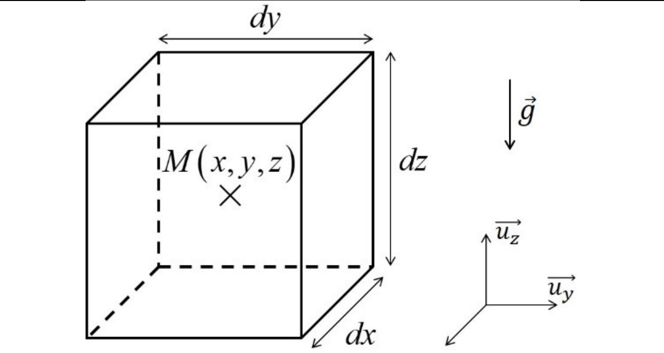
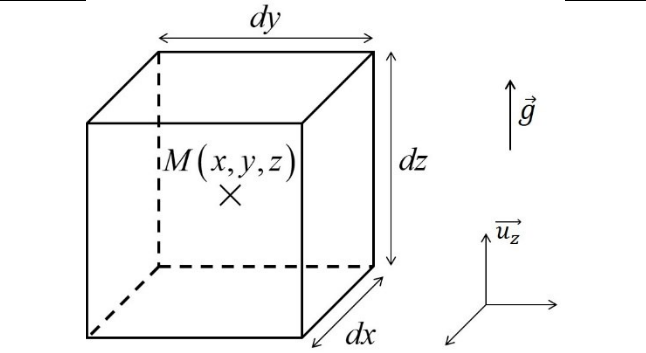
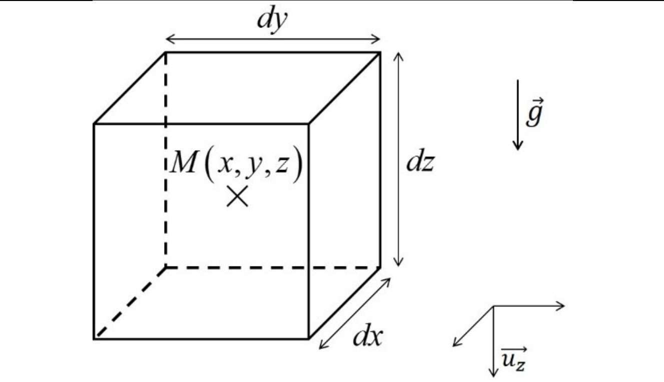
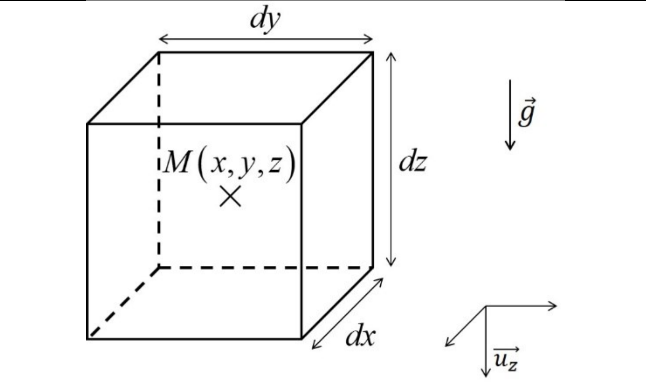


A	$\overrightarrow{dF_S} = P\left(x, y, z - \dfrac{dz}{2}\right) dydz\overrightarrow{u_z}$	C	$\overrightarrow{dF_S} = P\left(x, y, z + \dfrac{dz}{2}\right) dydz\overrightarrow{u_z}$
B	$\overrightarrow{dF_S} = -P\left(x, y, z + \dfrac{dz}{2}\right) dydz\overrightarrow{u_z}$	D	$\overrightarrow{dF_S} = -P\left(x, y, z + \dfrac{dz}{2}\right) dydx\overrightarrow{u_z}$

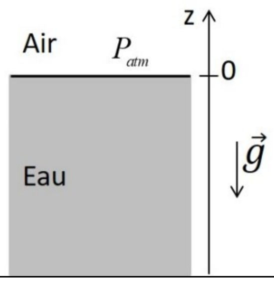
5) Retrouver la (les) formule(s) juste(s).

A	$\left(P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)-P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)\right)dxdz\overrightarrow{u_y} = -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\overrightarrow{u_y}$	C	$\left(P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)-P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)\right)\overrightarrow{u_y} = -\frac{\partial P}{\partial y}dx\overrightarrow{u_y}$
B	$\left(P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)-P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)\right)dxdz\overrightarrow{u_y} = \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\overrightarrow{u_y}$	D	$\left(P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)-P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)\right)\overrightarrow{u_y} = -\frac{\partial P}{\partial y}dy\overrightarrow{u_y}$

6) Dans quel(s) cas la relation fondamentale de statique des fluides est-elle juste ?

A		C	
	$\frac{dP}{dz} = \mu g$		$\frac{dP}{dz} = \mu g$
B		D	
	$\frac{dP}{dz} = \mu g$		$\frac{dP}{dz} = -\mu g$

7) Dans le cas d'un fluide incompressible et homogène, donner la (les) expressions de la variation de pression avec z juste(s) correspondant au dessin suivant.



A	$P(z) - P_{atm} = -\mu g z$	C	$P(z) = P_{atm} + \mu g z$
B	$P_{atm} - P(z) = -\mu g z$	D	$P(z) = P_{atm} - \mu g z$

6 Exercices Terminale STI2D

6.1 Pression au fond d'une piscine

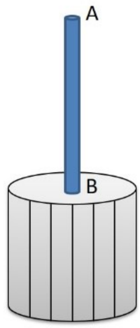
Avant de se lancer dans la construction d'une piscine privée, il faut étudier les forces pressantes, autrement dit la pression exercée sur le fond de la piscine, afin de construire une piscine résistante à ces forces. La piscine fait 8,80m de long sur 4,20m de large. Sa profondeur varie linéairement de 1,00m à 1,90m pour sa partie la plus profonde.

1) Quelle la valeur de la pression de l'eau à une profondeur z ?

2) En déduire la valeur maximale des forces de pression s'exerçant sur le fond de la piscine.

6.2 Le « paradoxe » de Pascal

Un tonneau de bois rempli d'eau, surmonté d'un tube creux ouvert aux deux extrémités, peut éclater si l'on verse de l'eau dans le tube à une hauteur suffisante, quelle que soit la section de ce tube, même si elle est très faible ; ce qui semble contraire au « bon sens ». Expliquer ce phénomène.



6.3 Plongée

Un plongeur en apnée évolue à la profondeur h=15m où règne une pression absolue d'environ 2,5 bar. Chacun de ses tympans a une surface d'aire S=0,60cm².

1) Calculer l'intensité de la force pressante F s'exerçant sur la face externe de chaque tympan.

2) Quelle serait la masse qui produirait une force de même intensité ?

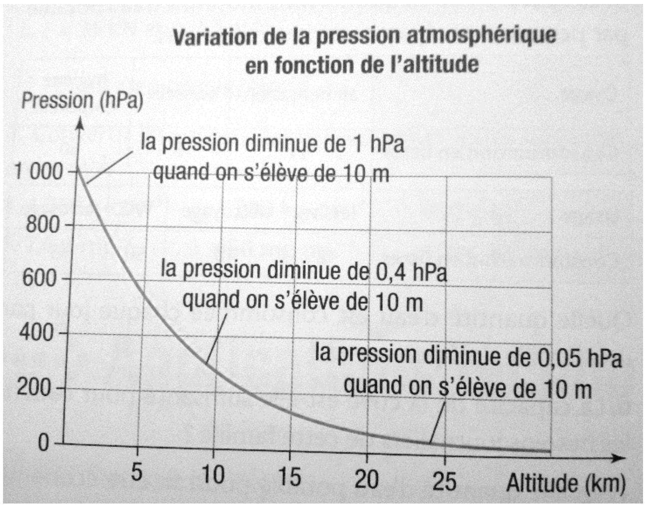
6.4 Force subie par un hublot d'avion

Un avion de ligne vole à environ 11000m d'altitude avec une « altitude cabine » d'environ 2500m.

1) Déterminer la pression à l'extérieur et à l'intérieur de l'avion.

2) Sachant que la différence entre ces deux pressions se traduit par une force sur le hublot, déterminer l'intensité de cette force pour un hublot de 600 cm².

3) Quelle serait la masse qui produirait une force de même intensité ?



7 Exercices type écrit (à faire en DM pour le 19/09/2018)

7.1 Plongée sous-marine (d'après CCP)

Si la plongée sous-marine apporte des joies multiples, elle présente aussi des dangers, liés aux aspects physiologiques et anatomiques du corps humain.
L'eau où le plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique $\mu = 1{,}0.10^3 kg.m^{-3}$, en équilibre dans le champ de pesanteur g uniforme, avec $g = 10 m.s^{-2}$. La surface libre de l'eau (côte *z* = 0) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante $P_{atm} = 1{,}0 \times 10^5\ Pa$.

1) On s'intéresse à un volume élémentaire $dV = dxdydz$ d'eau de mer à l'équilibre (Fig. 1). On notera $P(x,y,z)$ la pression de l'eau en un point de coordonnées (x,y,z).
Citer les forces s'exerçant sur ce volume élémentaire.
En traduisant l'équilibre de ce volume dV, montrer que la pression ne dépend pas des coordonnées x et y.

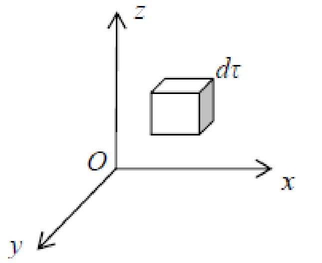


Figure 1 : Equilibre d'un volume élémentaire

Donner alors l'expression de la résultante des forces s'exerçant sur dV en fonction de g, $\mu(z)$, $P\left(z - \frac{dz}{2}\right)$, $P\left(z + \frac{dz}{2}\right)$, dx, dy, dz et $\overrightarrow{u_z}$ vecteur unitaire de l'axe (Oz) ascendant. En déduire la relation fondamentale de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\mu g$.

2) Déterminer, littéralement et numériquement, la pression $P(z)$ de l'eau en un point de cote z ; tracer le graphe de $P(z)$.

7.2 L'influence de la concentration en dioxyde de carbone (CCP TSI 2015)

Conventionnellement, l'atmosphère d'une planète est divisée en plusieurs couches. On s'intéresse au modèle simplifié de la couche la plus basse appelée troposphère : le gaz contenu dans la troposphère d'une planète est assimilé à un gaz parfait et on suppose que la température de la troposphère est uniforme et égale à T_0.
On note n la quantité de matière de gaz contenue dans la troposphère, V le volume de gaz contenu dans la troposphère et M la masse molaire de ce même gaz. Pour repérer l'altitude, on place un axe (Oz) vertical dirigé vers le haut dont l'origine est située à la surface du sol. On définit la pression $P(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ du gaz de la troposphère à l'altitude z. On suppose enfin que l'intensité de la pesanteur g ne varie pas avec l'altitude de la troposphère.
1) Rappeler la loi des gaz parfaits et les unités des grandeurs qui y figurent. En déduire une expression de la masse volumique $\rho(z)$ du gaz de la troposphère en fonction de la pression $P(z)$ du gaz, de la constante des gaz parfait R, de la température T_0 et de la masse molaire M.
2) On suppose que chaque couche de la troposphère est en équilibre statique dans le référentiel galiléen du sol. Montrer que la pression $P(z)$ peut se mettre sous la forme : $P(z) = P_0 exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ où P_0 est la pression à l'altitude $z = 0$ et H est un paramètre que l'on exprimera en fonction de M, g, R et T_0. Quelle est l'unité de H ?
On donne le profil de température de l'atmosphère terrestre (figure 1).

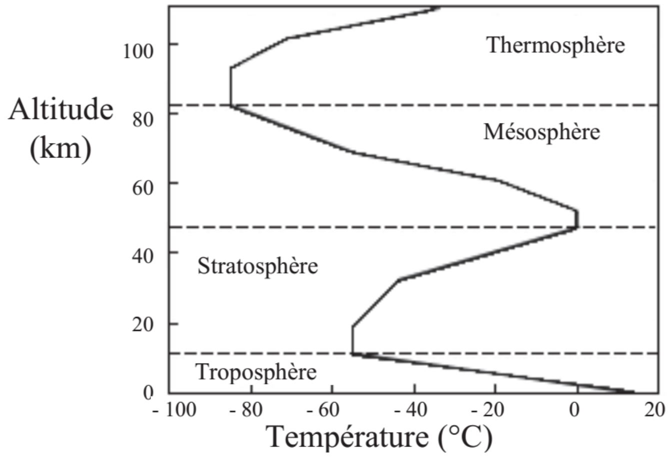


Figure 1. Profil de température de l'atmosphère terrestre.

3) D'après la figure 1, le modèle simplifié de la troposphère adopté à la question précédente vous paraît-il justifié ? Dans le cas contraire, quel autre modèle relatif à la température aurait-on pu employer ? Justifier.

4) D'après le tableau 1, comparer la distance par rapport au Soleil des planètes Mercure et Vénus, leur température moyenne en surface et la composition de leur atmosphère. Que peut-on déduire de l'influence de la concentration en dioxyde de carbone dans l'atmosphère d'une planète sur sa température ? Comment se nomme cet effet ?

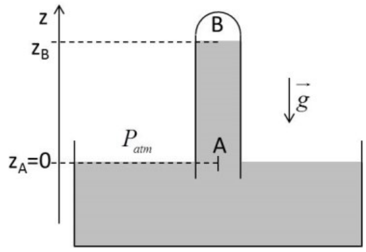
Planètes	Distance au Soleil	Température moyenne en surface	Pression atmosphérique	Composition de leur atmosphère	$\frac{B_{planète}}{B_T}$
Mercure	0,30 à 0,47 UA	- 170 °C à 430 °C	~10^{-9} Pa	Quasiment sans atmosphère	10^{-2}
Vénus	0,72 UA	470 °C	$9{,}3.10^{6}$ Pa	Principalement du dioxyde de carbone	Trop faible pour être mesuré
Terre	1 UA	- 93,2 °C à 56,7 °C	$1{,}013.10^{5}$ Pa	~80 % de diazote ~20 % de dioxygène	1
Mars	1,4 à 1,7 UA	- 100 °C à 0 °C	600 Pa	Peu épaisse. Principalement du dioxyde de carbone	2.10^{-3}

1 UA = $1{,}5.10^{11}$ m : distance Terre-Soleil ; B_T : champ magnétique terrestre moyen ; $B_{planète}$: champ magnétique de la planète.

Tableau 1. Enquête sur l'univers, Audouze et Chièze, Nathan, mai 1990

8 Exercices type oral

8.1 Baromètre de Torricelli



Le baromètre de Torricelli est composé d'un tube, rempli de mercure retourné sur une cuve, contenant également du mercure. L'atmosphère, qui exerce une pression P_{atm} sur la surface libre du mercure dans la cuve, empêche le tube de se vider.

1) Au-delà de quelle hauteur le tube n'est-il plus entièrement rempli ?

2) Expliquer alors le principe de la mesure barométrique (mesure de la pression atmosphérique).

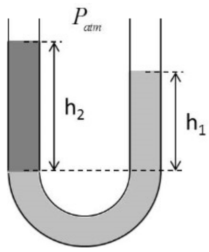
3) Une unité employée parfois pour les pressions est le millimètre de mercure. Comment le convertit-on en Pascal ?

4) Quel serait le problème si l'on utilisait de l'eau, plutôt que du mercure ?

<u>Données</u> : - masse volumique du mercure : $\mu_{Hg} = 13,5.10^3 kg.m^{-3}$

- masse volumique de l'eau : $\mu_{eau} = 1,0.10^3 kg.m^{-3}$
- pression atmosphérique : $P_{atm} = 1bar$
- accélération de la pesanteur : $g = 10m.s^{-2}$

8.2 Tube en U contenant deux liquides



Un tube en U contient deux liquides non miscibles de masses volumiques μ_1 *et* μ_2. Ces deux liquides sont en contact avec l'air libre à la pression P_{atm}.

1) Exprimer la masse volumique μ_2 en fonction de μ_1, h_1 *et* h_2.

2) Quel est le liquide le plus dense ?

3) Que dire du principe des vases communicants ?

8.3 Modèles d'atmosphère

L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M. On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol ($z = 0$), la pression est P_0 et la température T_0.

1) On suppose que la température de l'atmosphère est uniforme. A partir de la relation de statique des fluides, établir la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude z. On introduira une hauteur caractéristique H du phénomène.

2) On suppose maintenant que la température de l'air décroit linéairement avec l'altitude z selon la loi ($\lambda > 0$) :

$$T(z) = T_0 - \lambda z$$

2.a) Montrer que la pression à l'altitude z est de la forme :

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$$

2.b) Calculer, dans ce modèle, la pression au sommet de l'Everest (8850 m).

3) Pour $z \ll H$, montrer que les résultats obtenus à l'aide des deux modèles précédents conduisent à une même fonction affine $P(z)$ donnant la pression en fonction de l'altitude.

<u>Données</u> : $M = 29g.mol^{-1}$; $g = 9,8m.s^{-2}$; $P_0 = 1,0bar$; $T_0 = 310K$; $\lambda = 5,0.10^{-3} K.m^{-1}$