

Magnétostatique

Extrait du programme

L'étude de la magnétostatique menée dans la partie 2 s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de TSI, les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.

Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le seront uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.

On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Magnétostatique	
Courant électrique. Vecteur densité de courant volumique. Distributions de courant électrique filiformes.	Calculer l'intensité du courant électrique traversant une surface orientée. Justifier la modélisation d'une distribution de courant par une distribution filiforme.
Champ magnétostatique. Principe de superposition.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ magnétostatique par superposition dans des cas simples.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie. Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques
Applications au fil rectiligne « infini » de section non nulle et au solénoïde « infini ».	Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution « infinie ». Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne « infini » de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde « infini » en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Relier les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de ligne de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. Approche numérique : représenter des cartes de lignes de champ magnétostatique.

Sommaire

- 1 Mise en évidence du champ magnétique et expérience**
- 2 Distributions de courants électriques**
 - 2.1 Courant électrique et distributions filiformes
 - 2.2 Vecteur densité de courant volumique
- 3 Symétries et invariances du champ magnétostatique**
 - 3.1 Symétries de la distribution de courants
 - 3.2 Invariances de la distribution de courants
- 4 Propriétés du champ magnétique**
 - 4.1 Flux du champ magnétique
 - 4.2 Circulation du champ magnétique
 - 4.3 Théorème d'Ampère
- 5 Distributions à haut degré de symétrie**
 - 5.1 Méthode de résolution
 - 5.2 Fil rectiligne infini parcouru par un courant I
 - 5.3 Cylindre parcouru par un courant volumique
 - 5.4 Solénoïde « infini » circulaire parcouru par un courant I
- 6 Questions de cours**
- 7 Questions à choix multiples**
- 8 Exercices d'application directe du cours**
 - 8.1 Symétries de la distribution de courants
 - 8.2 Invariance de la distribution de courants
 - 8.3 Conservation du flux de B
 - 8.4 Circulation du champ magnétique
- 9 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 19/12/2018)**
- 10 Exercices type oral et révisions sur l'induction**
 - 10.1 Rappels
 - 10.2 Cadre dans un champ uniforme
 - 10.3 Bobinage sur un noyau torique
 - 10.4 Barres mobiles sur deux rails
- 11 Exercices de khôlles**

5 Distributions à haut degré de symétrie

5.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution (en utilisant le théorème d'Ampère) :

- 1- Rechercher les symétries et invariances.
- 2- Choisir le contour orienté et fermé d'Ampère
- 3- Calcul du champ magnétostatique

5.2 Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

On considère un fil rectiligne infini confondu avec l'axe Oz et parcouru par un courant I . Le courant et l'axe Oz sont orientés dans le même sens. Ce système modélise un circuit fermé comportant une portion rectiligne de longueur L grande devant la distance r au point M où est évalué le champ $\vec{B}$. Le point $M(r, \theta, z)$ est repéré par ses coordonnées cylindriques.

Modélisation d'une situation courante : fil quelconque parcouru par un courant permanent qui crée un champ magnétique en un point M voisin du fil

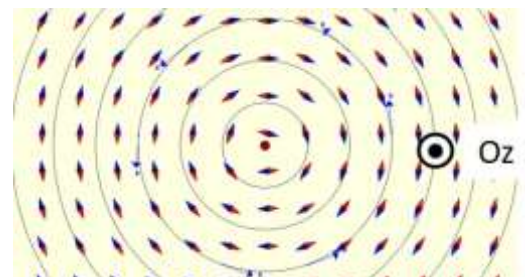
5.2.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Invariances :



5.2.2 Contour d'Ampère



5.2.3 Calcul du champ magnétostatique

Circulation :

Courant intérieur :

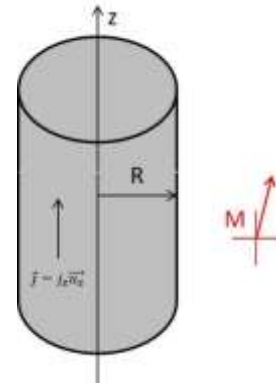
Théorème d'Ampère :

5.3 Cylindre parcouru par un courant volumique

Un cylindre infini de rayon R et d'axe Oz est parcouru par un courant volumique $\vec{j} = j_z \vec{u}_z$ ($j_z > 0$) uniforme. On cherche à déterminer le champ magnétique en tout point.

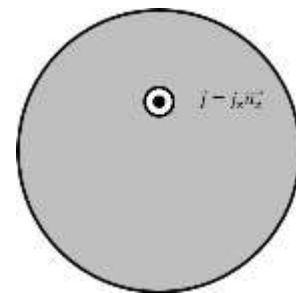
5.3.1 Symétrie et invariance

Symétries :



Invariances :

5.3.2 Contour d'Ampère



5.3.3 Calcul du champ magnétostatique

Circulation :

Courant intérieur :

Théorème d'Ampère :

5.4 Solénoïde « infini » circulaire parcouru par un courant I

On considère un solénoïde d'axe Oz de taille infinie. Le solénoïde est constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre : soit R son rayon et n son nombre de spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité I . Nous calculons ici le champ en tout point intérieur au solénoïde.

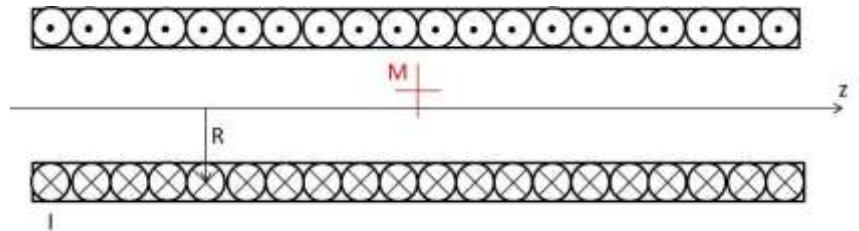
Le point $M(r, \theta, z)$ est repéré par ses coordonnées cylindriques.

Modélisation d'une situation courante : champ magnétique créé dans une bobine

Hypothèse supplémentaire : le champ magnétostatique est nul à l'extérieur du solénoïde (à comprendre avec les lignes de champ).

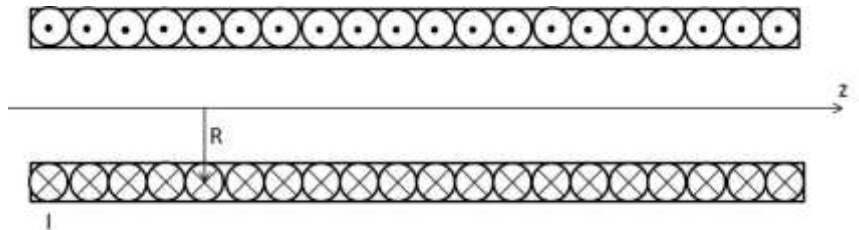
5.4.1 Symétrie et invariance

Symétries :



Invariances :

5.4.2 Contour d'Ampère



5.4.3 Calcul du champ magnétostatique

Circulation :

Courant intérieur :

Théorème d'Ampère :

6 Questions de cours

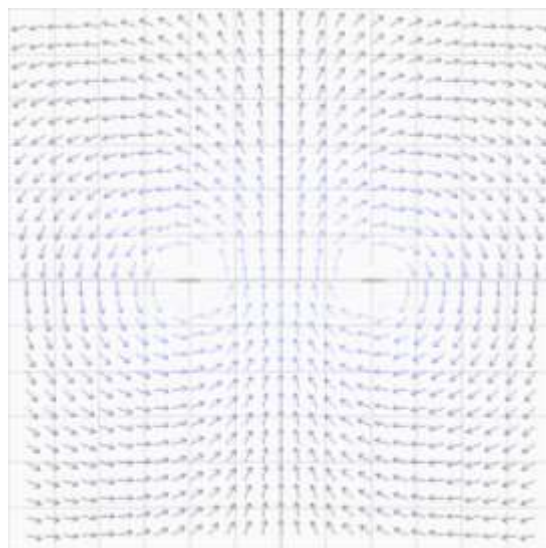
- 1) Donner la définition de l'intensité du courant électrique. Relier courant électrique et densité de courant volumique. Comment exprimer le vecteur densité de courant volumique pour un mouvement d'ensemble de porteurs de charges ? On donnera les noms et unités de grandeurs utilisées.
- 2) Définir les notions de plans de symétrie et d'anti-symétrie pour une distribution de courants. Quelle est la conséquence pour le champ magnétostatique ?
- 3) Quelle propriété a le flux du champ magnétique (faire une phrase et donner une expression mathématique) ? Donner son unité. Quelle conséquence cela a-t-il sur les lignes de champ ?
- 4) Enoncer le théorème d'Ampère.
- 5) Donner quelques ordres de grandeur de champ magnétique.
- 6) Retrouver l'expression du champ magnétostatique généré par un fil infini parcouru par un courant I en tout point de l'espace.
- 7) Retrouver l'expression du champ magnétostatique généré par un cylindre infini parcouru par un courant volumique selon l'axe du cylindre en tout point de l'espace.
- 8) Retrouver l'expression du champ magnétostatique généré par un solénoïde infini parcouru par un courant I en tout point intérieur du solénoïde, sachant que le champ extérieur est nul.

7 Questions à choix multiples

8 Exercices d'application directe du cours

8.1 Symétries de la distribution de courants

- 1) Soit un fil infini parcouru par un courant I . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de courants. En déduire la direction du champ magnétostatique en un point M situé à une distance r de l'axe du fil ?
- 2) Soit une spire circulaire parcourue par un courant I . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de courants. Que peut-on en déduire sur la direction du champ magnétostatique en un point M situé sur l'axe de la spire ?
- 3) Soit un solénoïde composé de N spires en série parcourues par un courant I . Déterminer les plans de symétrie de la distribution de courants. Que peut-on en déduire sur la direction du champ magnétostatique en un point M situé sur l'axe du solénoïde ?
- 4) Retrouver les plans de symétrie du champ magnétostatique correspondant aux deux distributions de courants ci-dessous. Retrouver le sens de parcours des deux fils.



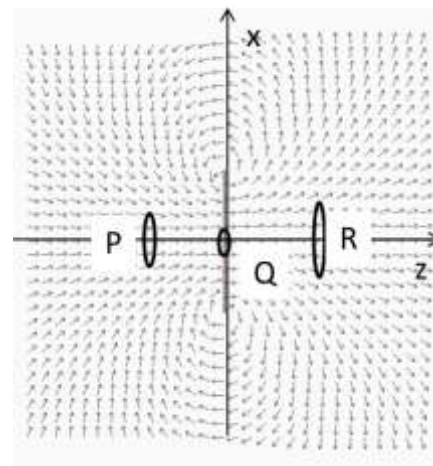
8.2 Invariance de la distribution de courants

- 1) Soit un fil infini parcouru par un courant I . De quelles coordonnées dépend le champ électrostatique ?
- 2) Soit une spire circulaire parcourue par un courant I . De quelles coordonnées dépend le champ électrostatique ?
- 3) Soit un solénoïde composé de N spires en série parcourues par un courant I . De quelles coordonnées dépend le champ électrostatique ?

8.3 Conservation du flux de B

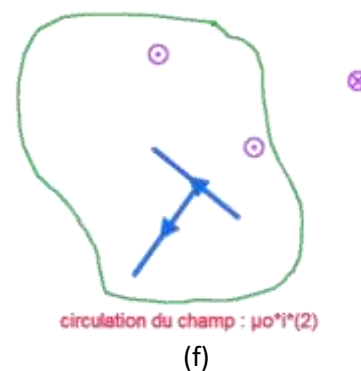
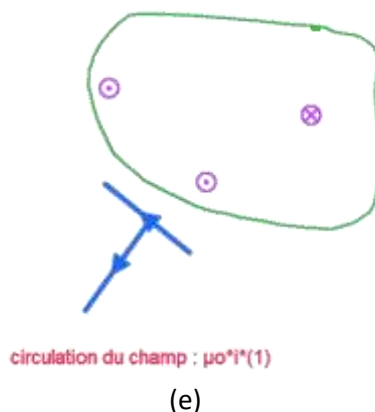
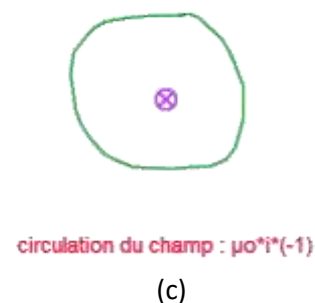
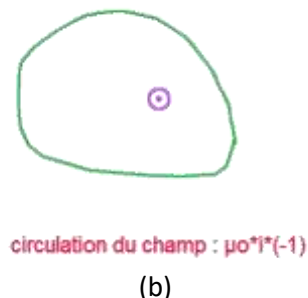
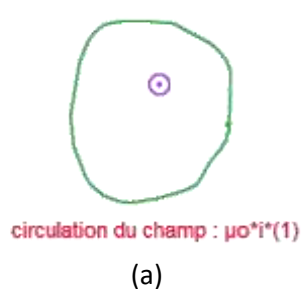
Sur une carte de champ magnétique, ont été délimitées 3 surfaces autour des points P, Q et R.

- 1) Comparer les intensités du champ en P, Q et R.
- 2) La distribution de courants à l'origine de cette carte de champ magnétique est invariante par rotation autour de l'axe Qz. L'identifier à partir d'un examen qualitatif des lignes.
- 3) Justifier alors, a posteriori, la relation d'ordre proposée initialement.



8.4 Circulation du champ magnétique

Différentes distributions de courants sont données ci-dessous. Pour chacune d'entre elles, la valeur de la circulation du champ magnétique calculée sur le contour tracé est donnée. Retrouver le sens des contours dessinés. Expliquer la valeur de la circulation trouvée.



9 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 19/12/2018)

Partie II – Transformateur torique

On étudie à présent un modèle simplifié de transformateur schématisé en **figure 1**. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R . On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_z)$ illustrée pour un point M quelconque sur le schéma.

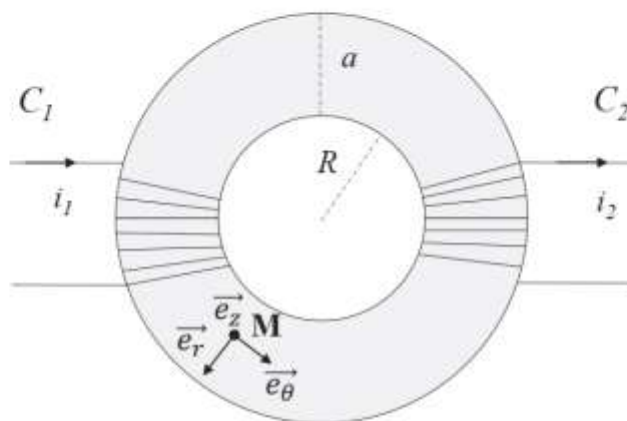


Figure 1 – Vue de dessus du transformateur

Le bobinage dit « primaire » noté C_1 est enroulé en N_1 spires autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Le bobinage dit « secondaire » noté C_2 est, de la même manière, enroulé en N_2 spires autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité i_2 . On notera μ_0 la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q10. Justifier soigneusement que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans C_1 est de la forme :

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r) \vec{e}_\theta. \quad (1)$$

Q11. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour Γ soigneusement précisé, démontrer que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le circuit C_1 en tout point à l'intérieur du tore est donné par :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta. \quad (2)$$

Q12. Établir l'expression du flux magnétique ϕ du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers une spire du circuit C_1 .

Q13. En déduire le flux total ϕ au travers des N_1 spires du circuit C_1 .

Q14. Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance).

Q15. En déduire que l'inductance propre L_1 du circuit C_1 est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right). \quad (3)$$

Q16. Quelle est alors l'expression de l'inductance propre L_2 du circuit C_2 ?

Q17. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M .

Q18. Démontrer que ce coefficient M est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right). \quad (4)$$

Q19. La résistance des bobinages étant négligée, exprimer la tension u_1 aux bornes du primaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_1 et M .

Q20. Faire de même pour la tension u_2 aux bornes du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_2 et M .

Q21. En déduire que l'on a la relation suivante :

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}. \quad (5)$$

- Q22.** Prouver que cette relation se simplifie pour faire apparaître ce que l'on appelle le rapport de transformation, défini comme le rapport des tensions du secondaire et du primaire :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (6)$$

- Q23.** Expliquer alors comment les transformateurs constituent des éléments centraux de la chaîne de transport de l'électricité.
- Q24.** Que peut-on dire du rendement en puissance entre primaire et secondaire ?
- Q25.** Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.
- Q26.** Quel peut être l'intérêt d'utiliser un transformateur si les circuits primaire et secondaire comportent le même nombre de spires ?
- Q27.** Technologiquement, les matériaux magnétiques des transformateurs sont réalisés en accolant des feuillets en acier. Quel type de pertes cherche-t-on ainsi à éviter ?

10 Exercices type oral et révisions sur l'induction

10.1 Rappels

Deux cas d'induction : - circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
- circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Forces de Laplace : $\vec{dF} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$

Moment résultant : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{M} = I \vec{S}$: moment magnétique

Flux du champ magnétique : $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

Si $\vec{B}$ uniforme sur la surface S et colinéaire à $\vec{dS}$, alors : $\Phi = BS$

Loi de Lenz : l'induction par ses effets s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance

Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec e : force électromotrice

Flux propre : flux de $\vec{B}$ créé par le circuit au travers de même circuit, Φ_{propre}

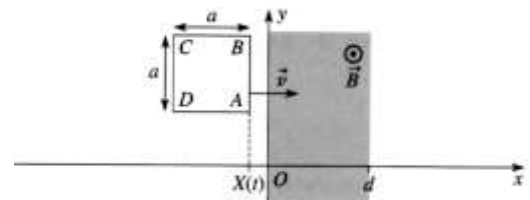
Inductance propre : $\Phi_{propre} = LI$

Flux de mutuelle inductance : flux de $\vec{B}$ créé par le circuit 1 au travers d'un circuit 2 $\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}$

Inductance mutuelle : $\Phi_2 = MI_1$ si influence totale $M = \sqrt{L_1 L_2}$

10.2 Cadre dans un champ uniforme

On suppose que le champ magnétique B est uniforme et constant entre les plans ($x = 0$) et ($x = d$), et nul ailleurs. Un cadre conducteur carré, de côté a ($a < d$), de résistance totale R et de côtés parallèles aux axes (Ox) et (Oy), circule avec une vitesse constante v. On désigne par X(t) l'abscisse du côté avant du cadre.

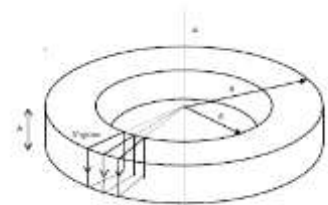


Déterminer en fonction de X le courant i et la force électromagnétique F résultante qui s'exerce sur le cadre. En déduire le mouvement du cadre.

10.3 Bobinage sur un noyau torique

Une bobine est constituée de N spires pratiquement jointives enroulées en une seule couche sur un tore de section carrée. On note a le rayon intérieur du tore et b le rayon extérieur et h la largeur du tore.

1) Lorsqu'un courant d'intensité I parcourt le circuit, déterminer le flux du champ magnétique propre à travers l'une des spires. En déduire une expression du coefficient d'auto-induction du bobinage.



2) Un second circuit est bobiné sur le tore, le nombre de spires est N'. Déterminer le coefficient d'induction mutuelle.

3) Application numérique : $a = 3 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ mm}$. Les bobinages ont respectivement 200 et 50 spires. Quelle approximation peut-on faire si $h \ll a$? Quel modèle de solénoïde obtient-on alors ?

10.4 Barres mobiles sur deux rails

Sur deux rails rectilignes parallèles horizontaux XX' et YY', de résistance négligeable, sont placées deux barres mobiles horizontales AA₁ et A'A₁ perpendiculaires aux rails. La distance entre les rails est l = 10 cm ; la résistance de la partie de chaque barre comprise entre les deux rails est R = 1 Ω ; chaque barre a une masse m = 10 g. L'ensemble étant soumis à l'action d'un champ magnétique vertical B uniforme d'intensité B = 1 T, on déplace la barre AA₁ en l'approchant de A'A₁, avec une vitesse constante $v_0 = 20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ normale à AA₁. Etudier la loi des vitesses v(t) de la barre A'A₁. Tracer le graphe de v(t).

