Energie du champ électromagnétique

Extrait du programme

Dans la partie **4**, on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. **Énergie du champ électromagnétique**	
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; densité volumique de puissance Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme globale.

Sommaire

3 Questions de cours

1) Donner l'expression de la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
2) Donner la loi d'Ohm locale. Dans quel cas peut-on l'utiliser ? Quelle relation retrouve-t-on si on l'intègre ? Comment exprimer la résistance d'un conducteur cylindrique ?
3) Sous quelle forme peut-on réécrire la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge dans un conducteur ohmique ? En l'intégrant sur le volume d'un conducteur ohmique cylindrique, quelle expression retrouve-t-on ? Comment peut-on aussi nommer cette puissance ?
4) Démontrer l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. On expliquera bien la signification de chacun des termes.
5) Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique, du vecteur de Poynting et de la puissance rayonnée.

4 Questions à choix multiples

5 Exercices d'applications directes du cours

5.1 Cas particulier du condensateur plan

On considère un condensateur plan dont les armatures de charges opposées $(Q, -Q)$ ont une surface S et sont distantes de d. Le champ électrostatique créé entre ses deux armatures est uniforme de norme E_0. La tension à ses bornes est notée U.
1) Donner l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur en fonction de la valeur de sa capacité C et de U.
2) Déterminer l'expression du champ électrostatique entre ses armatures (que l'on pourra supposées infinies dans ce cas). On donnera alors l'expression de E_0 en fonction de Q, S et ε_0.
3) Déterminer alors l'expression de la tension U entre ses bornes en fonction de E_0 et d.
4) Retrouver alors l'expression de la capacité d'un condensateur plan en fonction de ses dimensions S et $d$et de ε_0.
5) En déduire une nouvelle expression de l'énergie stockée dans le condensateur en fonction de E_0 et de ses dimensions.
6) En déduire la densité volumique d'énergie électrique.

5.2 Cas particulier du solénoïde infini

On considère un solénoïde de longueur l contenant N spires de section S parcouru par un courant$i$.
1) Donner l'expression de l'énergie emmagasinée dans une bobine en fonction de la valeur de son inductance L et de i.
2) Déterminer l'expression du champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde (que l'on considèrera infini dans ce cas) en le supposant nul à l'extérieur. On notera B_0 sa norme que l'on exprimera en fonction de μ_0, N, l et i.
3) Déterminer le flux propre ϕ_{propre} du solénoïde.
4) Retrouver l'expression de l'inductance du solénoïde en fonction de ses dimensions S et l et de N et μ_0.
5) En déduire une nouvelle expression de l'énergie emmagasinée dans la bobine en fonction de B_0 et de ses dimensions.
6) En déduire la densité volumique d'énergie magnétique.

5.3 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I uniformément répartie et de conductivité γ uniforme. Il est de section S , de rayon a, de longueur L et dirigé selon Oz.

1) Donner la loi d'Ohm locale.

2) En déduire la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.

3) Donner l'expression du champ magnétique crée par le cylindre pour $r > a$. On supposera le cylindre infini.

4) Donner l'expression du vecteur de Poynting.

5) En déduire la valeur de la puissance entrant par rayonnement dans le dipôle. Conclure.

6 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 16/01/2019)

Deuxième problème : induction

Nous nous proposons, dans ce problème, d'étudier deux applications pratiques du phénomène d'induction.
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Première partie : chauffage par induction

Un disque conducteur de conductivité σ, d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ (figure 6). Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé verticalement suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_z$;
- il varie sinusoïdalement au cours du temps selon la forme : $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t)\vec{e}_z$, où B_m représente son amplitude et ω sa pulsation.

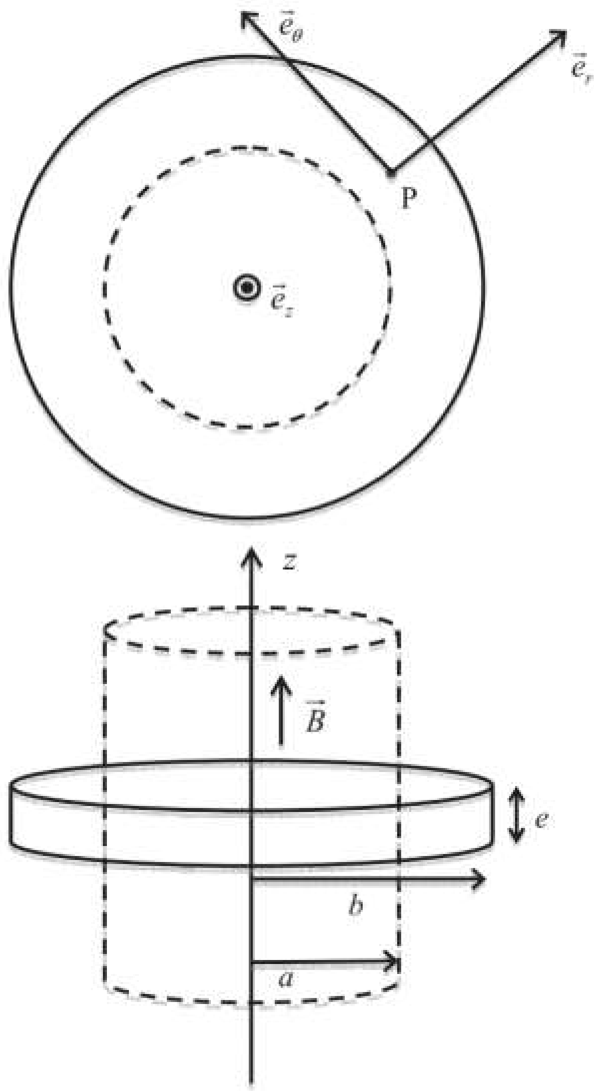


Figure 6 : disque conducteur et champ magnétique

Nous admettrons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit $\vec{j}$;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1 – Rappeler la relation liant le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ dans un conducteur de conductivité σ.

2 – On considère un contour circulaire Γ de rayon r et d'axe Oz. Déterminer la circulation $C(r,t)$ du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera $C(r,t)$ en fonction de r, $j(r,t)$ et σ.

3 – Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers la surface définie par le contour Γ.
On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

4 – En appliquant la loi de Faraday, déterminer l'expression du courant volumique induit $j(r,t)$ en fonction de σ, ω, r, a, B_m et t.
On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

5 – Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule.

6 – En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon r, de largeur dr et d'épaisseur e, déterminer l'expression de la puissance totale P_{joule} dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne $\langle P_{joule} \rangle$.

On montrera que $\langle P_{joule} \rangle$ peut se mettre sous la forme $\langle P_{joule} \rangle = A\omega^2 B_m^2$ où A est un coefficient que l'on exprimera en fonction de e, a, b et σ.

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas, le coefficient A est donné par l'expression :

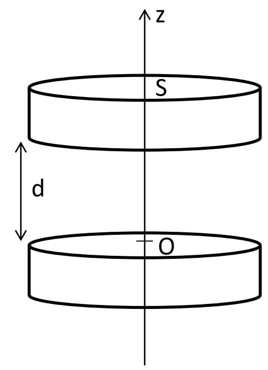
$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}.$$

7 – Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques à induction pour chauffer les casseroles et leur contenu.
Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité ?
Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.

8 – En pratique, le champ magnétique utilisé a une pulsation ω de l'ordre de 2×10^5 rad.s^{-1} (courant de fréquence f de l'ordre de 30 kHz). Son intensité B_m est de l'ordre de 10^{-4} T.
On considère une plaque à induction de rayon b = 10 cm et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b$ = 10 cm, une épaisseur e = 1,0 cm et une conductivité $\sigma = 6{,}0 \times 10^7$ S.m^{-1}.
Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne $\langle P_{joule} \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.

7 Exercices type oral

7.1 Charge d'un condensateur



On effectue le bilan énergétique d'un condensateur lors de sa charge très lente (ARQS). On raisonne sur un modèle de condensateur plan, de section circulaire S, rayon R, d'axe Oz et de distance inter-armatures d.

Dans le cadre de l'ARQS : $R\omega \ll c$. On pose aussi : $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

On note $q(t) = q_0\,cos(\omega t)$ la charge de l'armature du condensateur située en $z = d$.

1) Quelle est l'expression du champ électrique entre les deux armatures supposées infinies ? La variation du champ électrique est à l'origine de l'existence d'un courant de déplacement. Quelle est son expression ?

2) Quelle est la valeur de la densité de courant volumique $\vec{j}$ entre les deux armatures ? Quelle est l'expression du champ magnétique entre les deux armatures de surface S ? (Utiliser le théorème d'Ampère). Donner alors sa valeur maximale $\overrightarrow{B_{max}}$.

3) Comparer les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de la densité volumique d'énergie. Donner alors l'expression de l'énergie électromagnétique, U, stockée dans le condensateur. Où est-elle localisée ? Donner aussi l'expression de la dérivée de U par rapport au temps.

4) Quelle est l'expression du vecteur de Poynting ? Exprimer alors la puissance rayonnée à travers la surface latérale du condensateur.

5) Faire un bilan d'énergie. Conclure.

7.2 Bilan énergétique associé à un solénoïde dans l'ARQS

Un solénoïde infini, de section circulaire de rayon a, de longueur d, comprend n spires par unité de longueur, chacune étant parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_0\,cos(\omega t)$. On suppose le courant suffisamment lentement variable pour se placer dans l'ARQS et que les lois de la magnétostatique sont applicables : $a\omega \ll c$.

1) Donner l'expression du champ magnétique qui existe à l'intérieur du solénoïde.

2) En déduire l'expression du champ électrique en tout point M à l'intérieur du solénoïde.

3) Comparer les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de la densité volumique d'énergie. Donner alors l'expression de l'énergie électromagnétique, U, stockée dans une portion de longueur d du solénoïde. Où est-elle localisée ? Donner aussi l'expression de la dérivée de U.

4) Calculer l'expression du vecteur de Poynting, puis sa puissance rayonnée à travers la paroi du solénoïde (cylindre d'axe (Oz) de rayon a et de hauteur d).

5) Interpréter les résultats précédents.

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$