Propagation

Extrait du programme de TSI1

Dans la partie **1** consacrée à la propagation, il est indispensable de s'appuyer sur l'approche expérimentale et sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation physique des signaux qui se propagent et leurs représentations spatiales et temporelles, sans qu'aucune référence soit faite ici à une expression mathématique du signal.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. **Propagation d'un signal**	
Exemples de signaux, spectre.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques. Connaître quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustiques et électromagnétiques.
Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle linéaire non dispersive. Célérité, retard temporel.	Prévoir dans le cas d'une onde progressive pure l'évolution temporelle à position fixée, et prévoir la forme à différents instants.
Onde progressive sinusoïdale : déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Etablir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité **Mesurer la célérité, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**

Extrait du programme de TSI2

La partie **5**, articulée autour de la propagation des ondes électromagnétiques, est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.

La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'approfondir leurs connaissances sur les ondes stationnaires et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude. La notion de densité de courant surfacique est introduite mais son calcul ne relève pas du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. **Propagation**	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
Exemple d'états de polarisation d'une onde plane progressive et monochromatique : polarisation rectiligne. Polariseurs.	Reconnaître l'expression d'une onde plane polarisée rectilignement. **Mettre en évidence une polarisation rectiligne.**
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	**Mettre en oeuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.**

Formation expérimentale

Nature et méthodes	Capacités exigibles
4. **Électricité**	
Onde électromagnétique	Mettre en oeuvre un détecteur dans le domaine des ondes centimétriques.

Sommaire

4 Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

L'OPPM est un modèle. Il est très intéressant car toute onde plane peut être exprimée comme la somme d'OPPM. Une onde plane progressive monochromatique représente donc la composante élémentaire d'un paquet d'ondes.

4.1 Retour sur l'équation d'onde scalaire

4.1.1 Solution unidimensionnelle

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $s(x,t)$: $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Les solutions s'écrivent sous la forme d'OPP telles que : $s(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$

On suppose que la propagation se fait selon les x croissants, ce qui donne : $s(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$

1) L'onde plane progressive monochromatique associée s'écrit sous la forme :

$$s(x,t) = s_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) = s_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right)$$

Expliquer la forme précédente. Que représentent s_m, ω et φ_0 ?

2) On pose : $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\overrightarrow{u_x} = k\overrightarrow{u_x}$ le **vecteur d'onde** (en rad.m^{-1}). Montrer que l'on peut aussi l'écrire en fonction de la **longueur d'onde** (en m), λ, sous la forme : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Que représente la longueur d'onde ?

3) Réécrire $s(x,t)$ en fonction de k. Commenter.

4.1.2 Solution 3D

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $s(x,y,z,t)$: $\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

L'OPPM solution s'écrira par analogie sous la forme suivante : $s(x,y,z,t) = s_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$

où $\vec{k} = k\vec{n}$ représente le vecteur d'onde dirigé selon la direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$

où $\vec{r}$ représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cartésiennes.

4) Montrer que l'on retrouve bien l'expression de la question 3 dans le cas d'une propagation unidimensionnelle selon x.

<u>Définition</u> :

Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f (ou pulsation ω). Une OPPM se propageant à la vitesse v selon la direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ s'écrit sous la forme :

$$s(x,y,z,t) = s_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$

Elle est caractérisée par : - sa **pulsation**, ω, ou sa **fréquence**, f, ou sa période temporelle, T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- son **vecteur d'onde**, $\vec{k}$, ou sa **longueur d'onde**, λ :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$$

Elle présente une **double-périodicité** temporelle de période T et spatiale de période λ.

Ces deux périodes sont reliées par la relation :

$$\lambda = vT$$

4.1.3 Notation complexe

L'écriture complexe peut être très utile lors de l'utilisation de fonctions sinusoïdales. Ainsi, on peut écrire la solution complexe sous la forme : $\underline{s}(x,y,z,t) = \underline{S}(x,y,z)e^{j\omega t} \quad avec \quad \underline{S}(x,y,z) = s_m e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\varphi_0}$

$$s(x,y,z,t) = \Re\left[\underline{s}(x,y,z,t)\right]$$

4.2 Application au champ électromagnétique

4.2.1 Propagation unidimensionnelle

5) En supposant toujours une propagation unidimensionnelle selon les x croissants, réécrire les expressions des vecteurs champ électrique et magnétique de la partie 2.

6) On suppose de plus que le champ électrique est polarisé rectilignement suivant Oy. Quelle composante du champ électrique est donc nulle ? Montrer alors que le champ magnétique peut s'écrire sous la forme :

4.2.2 Propagation 3D

Les champs se mettent alors sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0x}) \\ E_{0y}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0y}) \\ E_{0z}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_{0x}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi'_{0x}) \\ B_{0y}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi'_{0y}) \\ B_{0z}\, cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi'_{0z}) \end{pmatrix}$$

7) Simplifier l'expression du champ électrique dans le cas où il est polarisé rectilignement selon Oy.

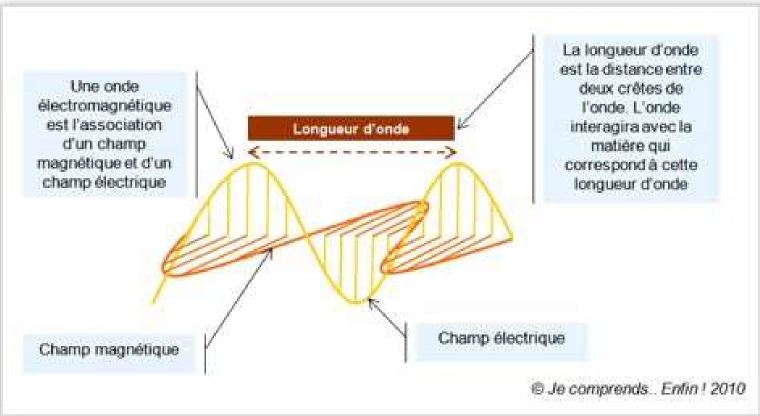
Propriété :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, le modèle de l'OPPM conduit à la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

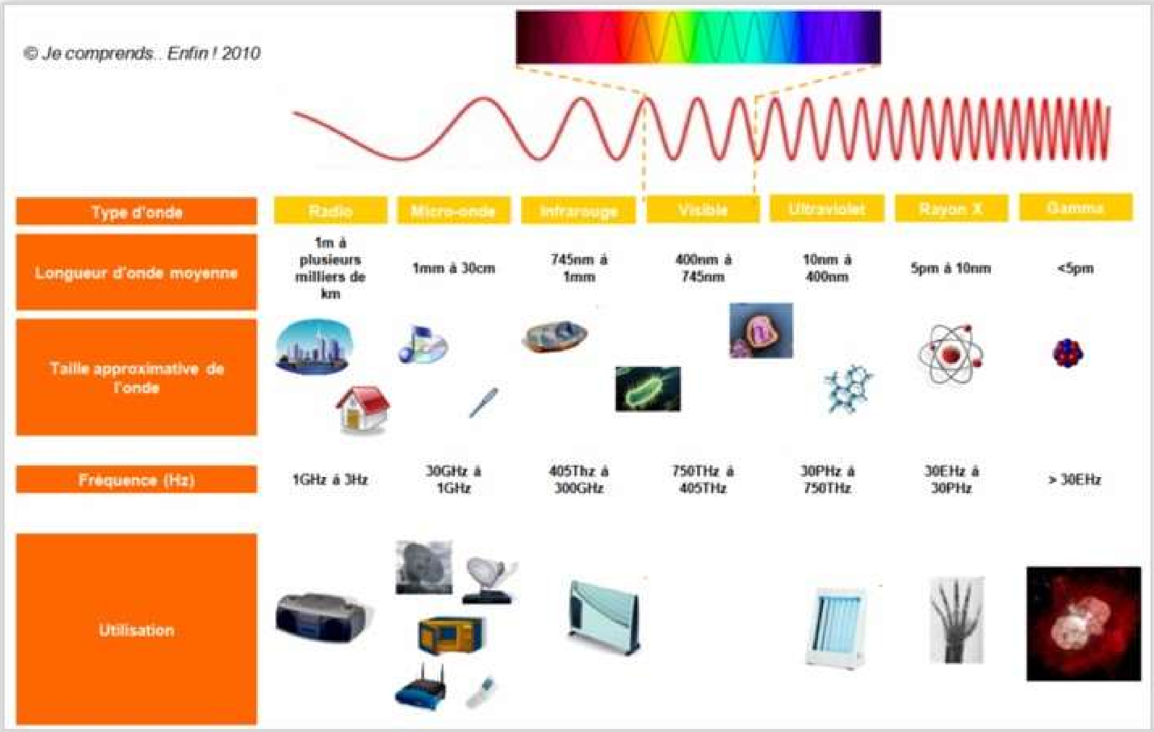
8) Montrer alors que $\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}$. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

Propriété :
Pour une onde plane progressive monochromatique de direction de propagation donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$, les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec le vecteur d'onde un trièdre direct.

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}$$



Quelques valeurs de fréquence et de longueur d'onde pour les ondes électromagnétiques :



4.2.3 Notation complexe

Pour une OPPM, le champ électromagnétique peut s'écrire à l'aide de la notation complexe tel que :

$$\vec{E} = \underline{\overrightarrow{E_0}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad avec \quad \underline{\overrightarrow{E_0}} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{j\varphi_{0x}} \\ E_{0y}e^{j\varphi_{0y}} \\ E_{0z}e^{j\varphi_{0z}} \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B} = \underline{\overrightarrow{B_0}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad avec \quad \underline{\overrightarrow{B_0}} = \begin{pmatrix} B_{0x}e^{j\varphi'_{0x}} \\ B_{0y}e^{j\varphi'_{0y}} \\ B_{0z}e^{j\varphi'_{0z}} \end{pmatrix}$$

4.3 Aspect énergétique

On se propose de regarder comme évoluent les considérations énergétiques pour une OPPM se propageant selon les x croissants et polarisée selon Oy : $\begin{cases} \vec{E} = E_{0y}\cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})\overrightarrow{u_y} \\ \vec{B} = \frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kx + \varphi_{0y})\overrightarrow{u_z} \end{cases}$

Il est nécessaire de se placer en réels pour effectuer cette étude car elle fait intervenir les carrés des champs. Prendre la partie réelle d'un carré n'est pas la même chose que prendre le carré de la partie réelle d'un nombre complexe.

4.3.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

9) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie transportée par le onde plane progressive électromagnétique. Les détecteurs sont le plus souvent sensibles à la valeur moyenne de l'énergie. Que vaut sa valeur moyenne $\langle u \rangle$? Commenter.

4.3.2 Vecteur de Poynting

10) A partir de la définition du vecteur de Poynting, donner son expression pour l'OPPM considérée. Que vaut sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$?

5 Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

5.1 Hypothèses

5.1.1 Modèle du conducteur parfait

1) Rappeler la loi d'Ohm locale, ses conditions d'applications et tous les termes entrant dans sa composition.

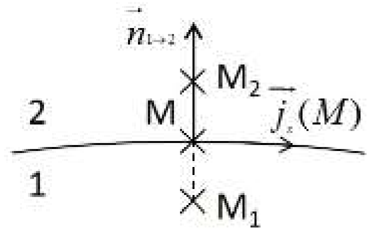
Définition :
Dans un conducteur parfait, la conductivité est très grande et on la considère infinie :

$$\gamma \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \to \vec{0}, \quad \rho \to 0, \quad \vec{B} \to \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

2) Démontrer les conséquences d'une conductivité infinie $\left(\vec{E} \to \vec{0}, \quad \rho \to 0, \quad \vec{B} \to \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}\right)$. Que peut-on dire des pertes par effet Joule ?

5.1.2 Relation de passage entre deux milieux

On considère une interface entre deux demi-espaces indicés 1 et 2 et l'on note $\vec{n}_{1\to2}$ la normale en un point M de cette surface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On définit deux points M_1 et M_2 dans chaque demi-espace au voisinage du point M.



Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ électrique à la traversée de la surface : $\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2}$

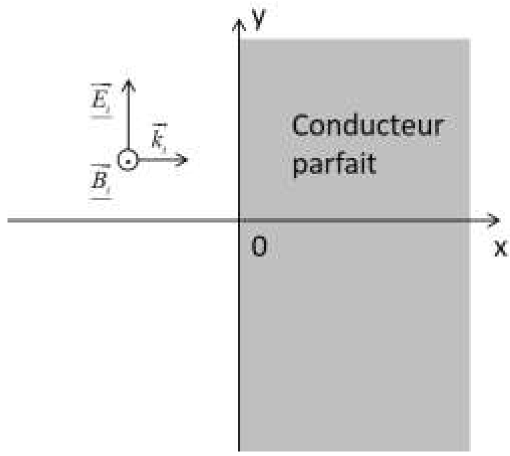
Soit $\vec{J_S}(M)$ la densité surfacique de courants (A.m^{-1}) au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ magnétique à la traversée de la surface : $\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{J_S}(M) \wedge \vec{n}_{1\to2}$

3) Que peut-on dire de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique au niveau d'un plan chargé ? Donner un exemple tiré du cours d'électrostatique où cette discontinuité avait déjà pu être observée.

5.1.3 Onde incidente

Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace $x < 0$. En $x = 0$, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose sa phase à l'origine nulle.
Le champ électrique incident peut s'écrire :

$$\vec{E_i} = E_{0i}\, cos(\omega t - k_i x)\,\vec{u_y}$$



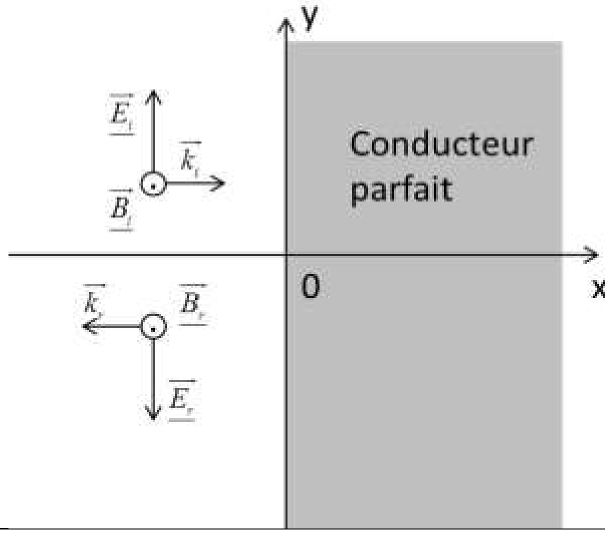
5.2 Réflexion sur un conducteur parfait

4) Donner l'expression du champ magnétique incident.

5) En utilisant la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$, montrer que la charge en surface du conducteur parfait est forcément nulle. Montrer ensuite qu'il faut qu'il existe une onde réfléchie se propageant à la même vitesse que l'onde incidente mais selon les x décroissants. On donnera l'expression du vecteur d'onde réfléchi en fonction du vecteur d'onde incident, puis l'expression de l'amplitude du champ électrique réfléchi en fonction de l'amplitude du champ électrique incident. On pourra supposer dans un premier temps que la réflexion ne change pas la polarisation de l'onde.

6) Donner l'expression du champ magnétique réfléchi.

Propriété :
La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait est une **réflexion totale** avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges surfaciques.



7) Donner l'expression du champ électrique total dans le vide. On pourra utiliser l'identité suivante :
$cos(p) - cos(q) = -2\,sin\left(\frac{p+q}{2}\right) sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Propriété :
La superposition des ondes incidentes et réfléchies sur un conducteur parfait donne naissance à une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une **onde stationnaire**. L'onde ne se propage plus. Elle oscille sur place.

8) Donner l'expression du champ magnétique total dans le vide. Comparer son expression à celle du champ électrique total. On pourra utiliser l'identité suivante : $cos(p) + cos(q) = 2\,cos\left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

9) Représenter les champs électriques et magnétiques totaux dans l'espace en un temps t_0 fixé.

10) Trouver la position x_n des nœuds de vibration du champ électrique, positions pour lesquelles le champ électrique total est nul. Quelle est la distance entre 2 nœuds successifs ?

11) Trouver la position x_v des ventres de vibration du champ électrique, positions pour lesquelles le champ électrique total est maximal. Quelle est la distance entre 2 ventres successifs ? Quelle est la distance entre un nœud et un ventre successif ?

12) Que peut-on dire de la position relative des nœuds et ventres de vibration du champ magnétique totale ?

13) Donner l'expression des vecteurs de Poynting associés à l'onde incidente $\overrightarrow{\Pi_i}$ et à l'onde réfléchie $\overrightarrow{\Pi_r}$. Donner leur valeur moyenne.

14) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi_{total}}$ associé à l'onde résultant de la superposition des champs incidents et réfléchis. Donner sa valeur moyenne. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

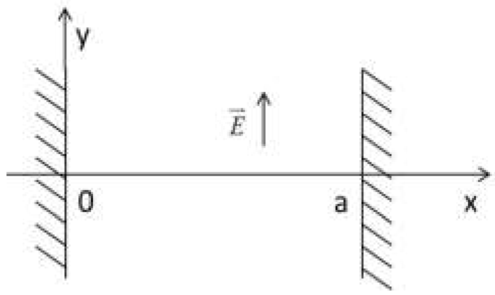
15) En utilisant la relation de passage pour le champ magnétique en $x = 0$, montrer que la réflexion de l'onde sur le conducteur parfait donne naissance à un courant surfacique $\overrightarrow{J_S}$ dont on donnera l'expression.

16) Expliquer alors pourquoi le champ réfléchi possède la même pulsation que le champ incident.

6 Applications aux cavités à une dimension

6.1 Position du problème

On considère une cavité vide taillée à l'intérieur d'un conducteur parfait entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$. Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face $x = a$. L'onde est alors réfléchie ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face $x = 0$. Elle est à nouveau réfléchie et le processus se répète indéfiniment. On comprend alors que l'onde résultante possède une structure stationnaire, vu la superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude.



6.2 Mode d'onde stationnaire

On suppose ici que le champ électrique est polarisé selon Oy et d'amplitude E_0, alors :

$$\vec{E} = 2E_0\, sin(\omega t)\, sin(kx)\, \overrightarrow{u_y}$$

1) Montrer que cette expression vérifie la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$.

2) En utilisant la relation de passage pour le champ électrique en $x = a$, montrer que seules certaines longueurs d'ondes λ_p peuvent subsister dans la cavité. On donnera leur expression en fonction de a. Commenter.

3) Donner alors l'expression des fréquences et pulsations associées à ces longueurs d'onde et remplacer dans l'expression du champ électrique.

4) En un temps t_0 fixé à $t_0 = 0$, tracer l'amplitude du champ électrique en fonction de x, pour des valeurs de $p \in [1; 3]$. L'entier p est appelé mode propre de l'onde stationnaire.

5) Que se passe-t-il si l'émetteur engendre une onde de longueur d'onde différente des λ_p dans la cavité ?

7 Approche documentaire (à rendre en DM pour le 30/01/2019)

En relation avec le cours sur les ondes, décrire le fonctionnement d'un oscillateur optique (laser) en termes de système bouclé auto-oscillant. Relier les fréquences des modes possibles à la taille de la cavité.

7.1 Documents à votre disposition

Document 1 : Le laser : principe de fonctionnement, article extrait des Reflets de la physique n_21 (Octobre 2010), p.12-16

Document 2 : vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=KxkuqxKH_Tw

Document 3 : Cours d'électronique : Oscillateur TP2

Document 4 : Cours d'électromagnétisme : Propagation partie 6

7.2 Questions

1) Etablir les analogies entre l'oscillateur optique qu'est le laser et l'oscillateur quasi-sinusoïdal qu'est le pont de Wien en remplissant le tableau ci-dessous. Représenter le Laser comme un système bouclé à l'aide d'un schéma-bloc.

2) Décrire le phénomène physique qui permet l'amplification de la lumière dans un laser.

3) Expliquer le double intérêt de la cavité optique.

4) En considérant l'onde optique se propageant dans la cavité laser comme une onde électromagnétique stationnaire, vérifier alors que la condition de résonnance (et dans le cas d'une cavité de type Fabry-Pérot) est bien : $2L = p\lambda$.

5) Exprimer alors les fréquences ν_p des modes longitudinaux qui peuvent exister dans la cavité en fonction de la longueur L de celle-ci puis retrouver l'écart en $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$ entre deux modes voisins.

6) Expliquer la figure 2 page 16 du document par analogie avec l'oscillateur quasi-sinusoïdal. Donner la condition de démarrage des oscillations.

7) Pour un Laser Hélium-Néon, quelle est la longueur d'onde de l'onde générée ? Donner la fréquence correspondante. Quelle est la taille minimale de la cavité optique nécessaire ?

8) Citer quelques applications du laser.

8 Questions de cours

1) Donner l'équation de propagation pour le champ électrique et la démontrer dans un espace vide de charges et de courants.

2) On suppose que l'équation de propagation est vérifiée par une fonction scalaire $u(x,t)$. Donner l'équation de propagation simplifiée. Quelle est la solution générale d'une telle équation ? On donnera la définition de l'onde obtenue et on précisera bien chacun des termes entrant dans sa composition.

3) Démontrer que les champs électriques et magnétiques sont forcément transverses, terme que l'on définira. Quelle relation permet de relier les champs électriques, magnétiques et la direction de propagation ?

4) Donner les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique, de la puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge et du vecteur de Poynting pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide sans charge ni courant. Commenter.

5) On suppose que l'équation de propagation est vérifiée par une fonction scalaire $u(x,y,z,t)$. Cette fonction représente une onde plane progressive monochromatique. Sous quelle forme peut-elle s'écrire ? Définir toutes les caractéristiques de cette onde.

6) Quelle relation permet de relier les champs électriques, magnétiques et le vecteur d'onde pour une onde plane progressive monochromatique ? Donner la relation de dispersion.

7) Expliquer ce qu'est la polarisation d'une onde. Donner certains cas particuliers. Comment mettre en évidence une polarisation rectiligne ?

8) Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Quelles en sont les conséquences ?

9) Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace x < 0. En x = 0, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose sa phase à l'origine nulle. Donner l'expression de l'onde incidente (champ E et B).

10) En utilisant le fait que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une interface, donner l'expression de l'onde réfléchie (champ E et B).

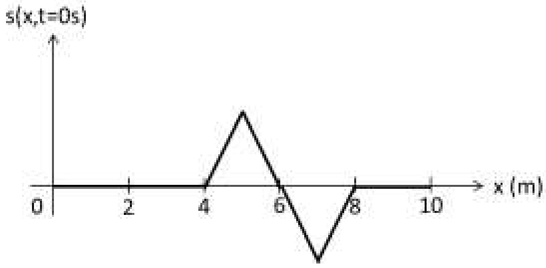
11) Retrouver l'expression de l'onde résultant de la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Commenter.

9 Questions à choix multiples

10 Exercices d'applications directes du cours

10.1 Onde progressive

On considère l'onde $s(x, t = 0)$ représentée ci-contre se propageant à la célérité $c = 2m.s^{-1}$ dans le sens des x croissants.
1) Représenter la forme de l'onde à l'instant $t = 1s$.
2) Un récepteur est placé à l'abscisse $x_0 = 8m$. Tracer l'évolution temporelle du signal reçu par ce récepteur.



10.2 Onde plane progressive monochromatique et notation complexe

On considère une onde électromagnétique polarisée selon Oy. Le champ électrique possède donc une seule composante selon $\overrightarrow{u_y}$. On utilise la notation complexe. On peut donc écrire le champ électrique sous la forme :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad avec \quad \underline{\overrightarrow{E_0}} = E_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \overrightarrow{u_y} = \underline{E_0}\overrightarrow{u_y}$ où $\underline{E_0}$ représente l'amplitude complexe du champ électrique.

1) Donner l'expression de $\underline{\overrightarrow{B_0}} = \underline{B_{0,x}}\overrightarrow{u_x} + \underline{B_{0,z}}\overrightarrow{u_z}$ où $\underline{B_{0,x}}$ et $\underline{B_{0,z}}$ représentent respectivement les amplitudes complexes du champ magnétique selon Ox et Oz.

2) Il est possible de simplifier l'écriture des équations de Maxwell en utilisant la notation complexe. Montrer que :

$$\begin{bmatrix} (MG) & div\vec{E} = 0 \\ (MA) & \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) & div\vec{B} = 0 \\ (MF) & \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (MG) & \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ (MA) & \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \\ (MT) & \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ (MF) & \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} \end{bmatrix}$$

3) Retrouver à partir de ces équations que le champ électromagnétique est transverse et forme un trièdre direct avec la direction de propagation.

4) L'équation de propagation peut aussi se simplifier en utilisant la notation complexe. En déduire la relation de dispersion : $k = \frac{\omega}{c}$.

10.3 Champ électromagnétique

On considère le champ électrique, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0\, cos(\omega t + kz)\,\overrightarrow{u_x} + E_0\, sin(\omega t + kz)\,\overrightarrow{u_y} \quad avec \quad k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\omega$$

1) Vérifier la compatibilité de cette expression avec l'équation de propagation.
2) Que peut-on dire de sa polarisation ?
3) Déterminer le champ magnétique associé.
4) Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

11 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 23/01/2019)

Les grandes ondes sont des ondes électromagnétiques appelées AM. La fréquence de ces ondes varie de 150 kHz à 300 kHz. Par exemple, la station Europe 1 émet des ondes dont la fréquence caractéristique vaut 185kHz. Elles sont émises par quatre mats haubanés qui émettent au total une puissance moyenne $P = 2000kW$. Dans toute la suite, on supposera que ces antennes rayonnent une onde électromagnétique plane et monochromatique de fréquence $f = 185kHz$. On supposera, dans cette partie, que l'onde se propage dans l'air que l'on assimilera au vide.

1) Calculer la longueur d'onde associée à ce rayonnement électromagnétique.

2) Rappeler l'expression des équations de Maxwell en précisant tous les termes entrant dans leur composition. Les simplifier dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.

3) Déduire des équations de Maxwell l'équation de propagation vérifiée dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide par le champ magnétique $\vec{B}$. En déduire celle vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$.

4) On suppose que le champ électrique est polarisé suivant Oy, et que l'onde se propage suivant les z croissants. En appelant l'amplitude du champ électrique E_0 en O, donner une expression possible du champ électrique en notant k la norme du vecteur d'onde. Donner, sans démonstration, l'expression de k en fonction de ω et c.

5) Donner le champ magnétique associé à cette onde.

6) Donner l'expression du vecteur de Poynting et en calculer sa valeur moyenne temporelle.

7) En supposant schématiquement que toute la puissance des antennes se retrouve sur une surface plane notée $S = 100km^2$, établir l'expression de E_0 en fonction de P (puissance moyenne temporelle du rayonnement). Faire l'application numérique.

8) Le modèle de l'onde plane est-il correct à l'échelle des récepteurs radios couramment utilisés ? Justifier votre réponse.

12 Exercices type oral

12.1 Superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0, de même pulsation ω et se propageant respectivement selon les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. On pose pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$:

$$\overrightarrow{u_1} = \sin\alpha\,\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_2} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\,\overrightarrow{u_z}$$

1) Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde k_1 et k_2 ?

2) Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à $\overrightarrow{u_y}$ et qu'ils sont en phase dans le plan x = 0, donner leur expression sous forme complexe.

3) En déduire l'expression du champ électrique total. Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?

4) Donner la forme du champ magnétique. Commentaires.

5) En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

12.2 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

Reprendre les questions 1 à 5 de la partie 5.2 du cours en passant par la notation complexe.

12.3 Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre z = 0 et z = a. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement suivant Ox et de sens de propagation opposés $\pm u_z$, de normes respectives E_1 et E_2.

1) Donner l'expression du champ électrique complexe résultant de la superposition, puis la forme exacte du champ électrique dans la cavité en utilisant les conditions aux limites.

2) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?

3) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?

4) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?

5) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental n = 1 est prédominant.