

Transfert d'énergie par conduction thermique

Extrait du programme

La partie **7** aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides. On se limite à l'étude de problèmes unidimensionnels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7. Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique.	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une interface.
Loi de Fourier.	Lier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique dans le domaine de l'habitat.
Bilan enthalpique.	Établir une relation différentielle entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la chaleur sans terme source.	Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Lier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion par une analyse dimensionnelle.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.

Formation expérimentale

Nature et méthodes	Capacités exigibles
4. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en oeuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique le protocole étant donné.

Sommaire

- 1 Les différents modes de transfert thermique**
 - 1.1 Conduction thermique**
 - 1.2 Convection thermique**
 - 1.3 Rayonnement thermique**
- 2 Densité de flux thermique**
- 3 Loi de Fourier**
- 4 Équation de la chaleur**
 - 4.1 Bilan enthalpique**
 - 4.2 Equation de la chaleur sans terme source**
 - 4.3 Irréversibilité du phénomène**
 - 4.4 Résolution dans le cas du régime stationnaire**
 - 4.5 Résistance thermique**
- 5 Transfert conducto-convectif : loi de Newton**
- 6 TP : Mesure de conductivités thermiques**
- 7 Questions de cours**
- 8 Questions à choix multiples**
- 9 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 21/11/2018)**
 - 9.1 Etude thermique d'un bâtiment (type CCP)**
 - 9.2 Centrale TSI 2016**
- 10 Exercices type oral**
 - 10.1 Contacts thermiques**
 - 10.2 Bilan entropique macroscopique**
 - 10.3 Simple et double vitrage**
 - 10.4 Chauffage d'une pièce**
 - 10.5 Isolant**
 - 10.6 Ailette de refroidissement**

Liens utiles pour revoir le cours

Les transferts thermiques (Partie 1) : https://www.youtube.com/watch?v=cHljISVSR_E

Les transferts thermiques (Partie 2) : <https://www.youtube.com/watch?v=10YeVC5ugBQ>

Les transferts thermiques (Partie 3) : <https://www.youtube.com/watch?v=LCwHaAjseIA>

Loi de Fourier et résistance thermique : https://www.youtube.com/watch?v=dzP67v0B_0

Equation de la chaleur : <https://www.youtube.com/watch?v=EzAlbIWb0jg>

6 TP : Mesure de conductivités thermiques

6.1 Matériel à disposition

Appareil de conduction thermique Didalab
Barres métalliques (Cuivre, Aluminium)

Ordinateur portable
Boitier ITAC
Manuel utilisateur

Câble USB
Câble HDMI
Câble alimentation 12 V

6.2 Installation et présentation du matériel

L'appareil de conduction thermique permet d'observer le phénomène de conduction thermique selon la longueur d'une barre de métal (Cuivre, Aluminium) en relevant la température en 8 points (capteurs) de cette dernière répartis comme suit (Figure 1). La propagation de la chaleur peut ici être considérée comme unidimensionnelle, l'appareil permettant de parfaitement calorifuger la barre latéralement.

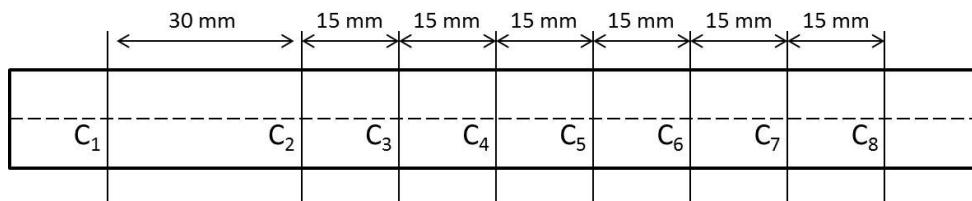


Figure 1

Le matériel est normalement prêt à être utilisé sur vos tables. Pour plus de précisions, vous pouvez consulter les pages 6, 7, 8 du manuel utilisateur. Il suffit maintenant d'allumer les ordinateurs et de brancher le câble USB. Lancer le logiciel Conductoo. La notice du logiciel se trouve aux pages 12, 13, 14 du manuel utilisateur.

6.3 Lancement de l'acquisition

On essaie dans un premier temps de mesurer la conductivité thermique du cuivre. Pour cela, la barre de cuivre a été insérée dans l'appareil au contact des capteurs thermiques.

6.3.1 Uniformisation des capteurs

Avant de lancer la chauffe, faites une acquisition simple (Figure 2). La température par chaque capteur s'affiche. Les capteurs peuvent ne pas tous afficher la même température.

Dans le menu « Paramètre », cliquez sur « Uniformity ». Tous les capteurs affichent alors la même température.

6.3.2 Mesure

Dans le menu « paramètre », cliquez sur « Acquisition » puis réglez la durée de l'acquisition à 1500s et le pas entre chaque point à 1s (Figure 3).

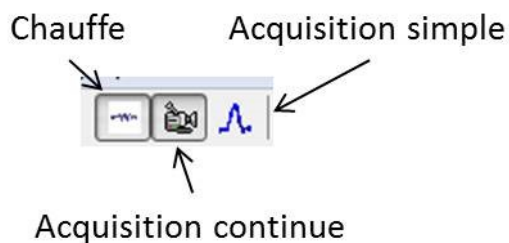


Figure 2

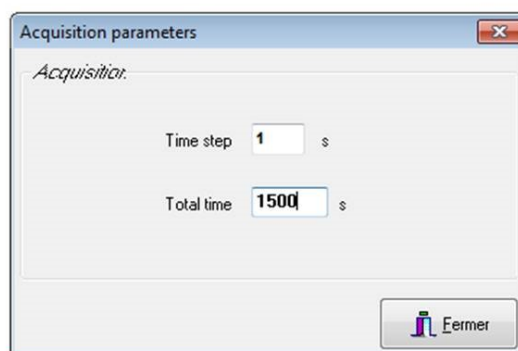


Figure 3

Lancer l'acquisition en continu et démarrez consécutivement la chauffe (Figure 2) et le ventilateur de l'appareil (bouton On/Off sur le côté).

Tout au long de la mesure on peut observer l'évolution de la température sur chaque capteur (Figure 4) .

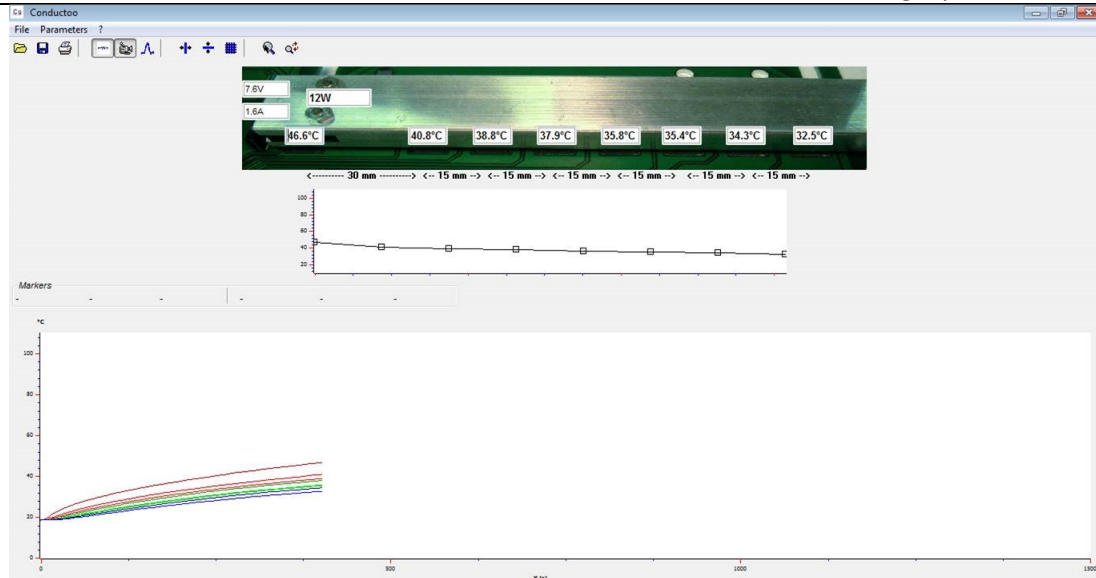


Figure 4

6.4 Exploitation des mesures

On rappelle l'équation de la chaleur dans le cas d'une propagation unidimensionnelle selon x par conduction thermique :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Le coefficient de diffusion permet de relier temps τ et longueur caractéristique L du phénomène de diffusion.

1) Donner la relation entre D , τ et L . Sachant que la longueur de la barre de cuivre est de $L = 19,5 \text{ cm}$, évaluer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire pour la barre de cuivre. Conclure sur la durée d'acquisition choisie.

6.4.1 Etude du régime permanent

2) En régime permanent (ou encore stationnaire), comment varie la température en fonction de la position x ? Quelle devrait être alors l'allure de la courbe représentant la température des 8 capteurs en fonction de leur position respective sur la barre de métal ?

3) Le programme indique une puissance de chauffe au niveau de la résistance thermique de $\Phi = 12 \text{ W}$. En s'appuyant sur la valeur théorique de la conductivité thermique du cuivre et sachant que la surface de la barre vaut $\Sigma = 2 \text{ cm}^2$, quel devrait être la pente de la droite précédente ?

4) A son extrémité droite, la barre est couplée thermiquement à l'extérieur grâce à un échangeur constitué d'un radiateur à ailettes et d'un ventilateur extracteur de chaleur. Ceci permet de maintenir constante la température à cette extrémité (température proche de la température ambiante). Le couplage thermique réalisé par cet échangeur est évalué par le coefficient de transfert conducto-convectif h' , d'après la loi de Newton :

$$\Phi(x=L) = h' \Sigma [T(x=L) - T_{\text{ext}}]$$

En déduire une méthode possible de mesure de h' .

5) Lorsque l'acquisition est finie, il est possible d'exploiter les mesures effectuées en exportant le fichier de mesure sous un tableur (type excel). Pour cela, aller dans le menu « File », puis « Export » et « Text file ». Ouvrir ensuite Excel et copier-coller le contenu du fichier texte dans une feuille de calcul. Il faudra probablement convertir les données (Données -> Convertir -> Délimité -> Point-virgule). Vous aurez alors dans les deux premières colonnes le temps (en seconde), puis la température relevée par les 8 capteurs de C_0 à C_8 .

Tracer alors la température (on ne prendra pas en compte le capteur C_0) en fonction de la position en régime permanent et faire une régression linéaire. Comparer le coefficient directeur obtenu à la valeur trouvée en question 3. Commenter.

6) En déduire une valeur de la conductivité thermique du cuivre λ . Comparer à la théorie.

7) Donner une valeur du coefficient de transfert conducto-convectif h' .

6.4.2 Etude en régime transitoire

Il est aussi possible de résoudre numériquement l'équation de la chaleur, en approchant les dérivées partielles par des différences finies. En effet, le relevé de température que nous avons effectué n'est pas continu. Il est discret aussi bien dans l'espace ($p = \Delta x = 15\text{mm}$) que dans le temps ($\Delta t = 1\text{s}$).

Rappelons ici le développement de Taylor de la fonction $T(x)$:

$$T(x+p) = T(x) + p \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{p^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + O(p^3)$$

8) Montrer que l'on peut approximer les dérivées partielles par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x+p,t) + T(x-p,t) - 2T(x,t)}{p^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

9) Comment peut-on alors retrouver la valeur de la conductivité thermique en utilisant le fichier excel précédemment créé ?

10) Déterminer alors la valeur de la conductivité thermique en prenant $\Delta x = 30\text{mm}$ et $\Delta t = 10\text{s}$.

Données :

- masse volumique du cuivre : $\mu = 8,9.10^3 \text{kg.m}^{-3}$
- capacité thermique massique du cuivre : $c = 385 \text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
- conductivité thermique du cuivre : $\lambda = 389 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

7 Questions de cours

- 1) Décrire les trois modes de transfert thermique.
- 2) Définir les notions de flux thermique, vecteur densité de flux thermique.
- 3) Donner la loi de Fourier (en 3D) et sa simplification pour une propagation unidimensionnelle. Définir les termes rentrant dans son expression.
- 4) Démontrer l'équation de la chaleur en faisant un bilan enthalpique sur une épaisseur dx de matériau de conductivité λ .
- 5) Comment appelle-t-on le coefficient entrant en compte dans l'équation de la chaleur ? Donner son expression. Quelle est sa signification physique ?
- 6) Résoudre l'équation de la chaleur dans le cas du régime stationnaire.
On prendra le cas d'une tige pour rester avec un problème unidimensionnel. On suppose donc de plus qu'il n'y a aucun échange thermique entre la tige et le milieu extérieur par la surface latérale du cylindre (isolation thermique). Cette tige est cylindrique de section S , de longueur L et ses extrémités sont aux températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$). Donner l'expression de la température, densité de flux thermique et flux thermique. Commenter.
- 7) Définir la notion de résistance thermique. Donner l'analogie avec l'électricité.
- 8) On donne la loi de Newton : $j_N = h(T_S - T_0)$. Expliquer les différents termes entrant dans son expression. Définir une résistance thermique pour ce type de transfert thermique.

8 Questions à choix multiples

9 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 21/11/2018)

9.1 Etude thermique d'un bâtiment (type CCP)

Avec les nouvelles normes environnementales et les diagnostics de performance énergétique des bâtiments, la cartographie thermique permet de localiser les zones de déperdition thermique les plus importantes. On peut ensuite cibler les travaux d'isolation à effectuer en toute connaissance de cause. L'isolation peut s'effectuer par l'intérieur ou l'extérieur avec des matériaux adéquats.

On pourra alors vérifier, à réception des travaux, l'efficacité de ces derniers.

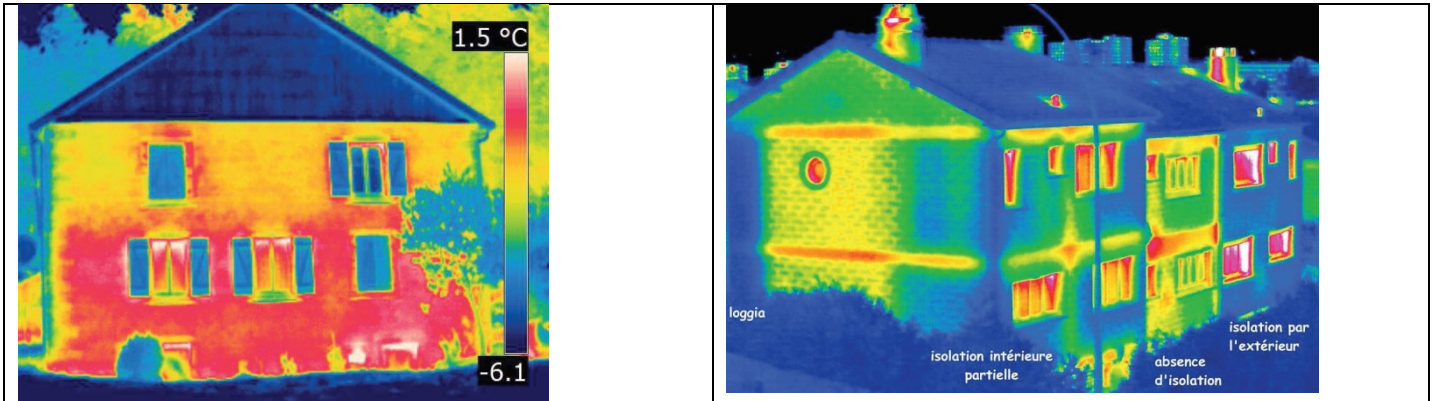


Figure 1. Thermographie infrarouge

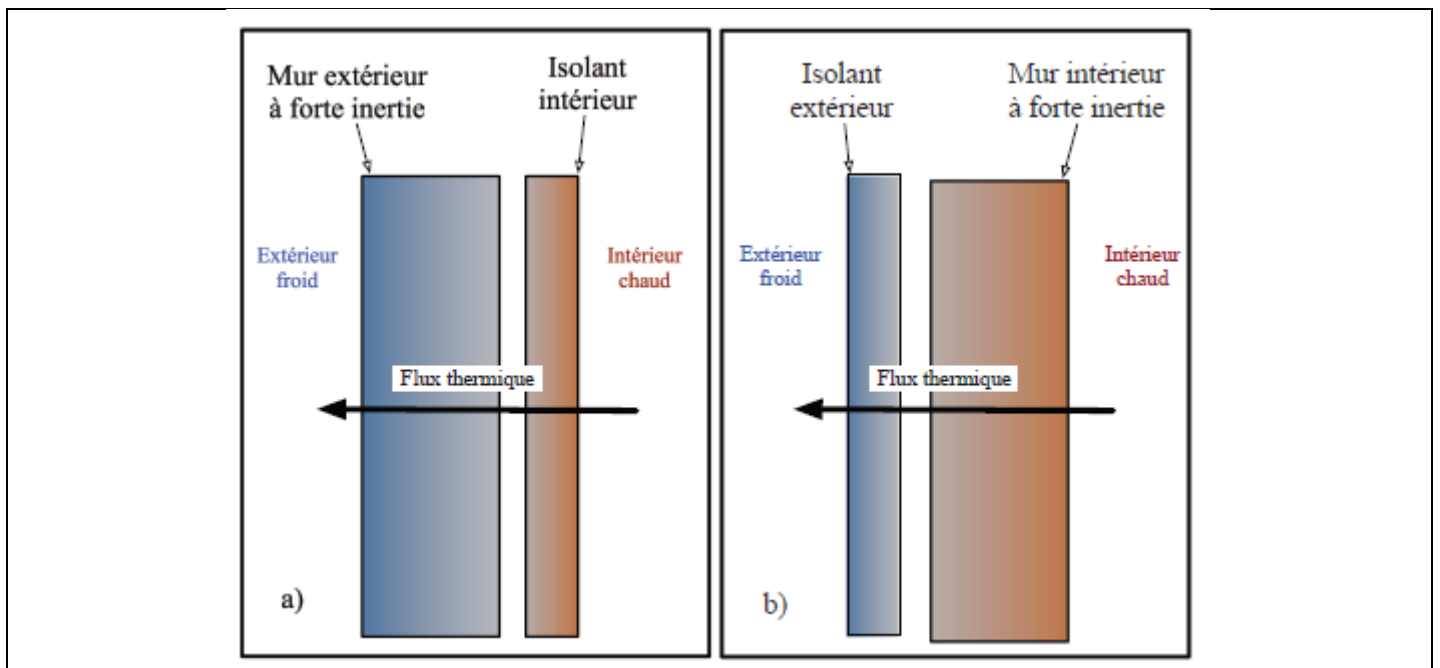


Figure 2. Isolation a) par l'intérieur ou b) par l'extérieur

9.1.1 Préambule

9.1.1.1 Modélisation de la pièce

On étudie une pièce parallélépipédique de longueur $a = 8\text{ m}$, de largeur $b = 5\text{ m}$, de hauteur $h = 2,5\text{ m}$ et possédant un radiateur électrique de puissance maximale $P = 2\text{ kW}$. Dans l'ensemble du problème, la pièce sera supposée parfaitement isolée au niveau du sol et du plafond. La capacité thermique volumique de l'air est $C_v = 1,25 \cdot 10^3 \text{ SI}$. On suppose ici que la pièce est parfaitement calorifugée.

1) Quelle est l'unité de la capacité thermique volumique ? Quelle est la valeur de la capacité thermique C de la pièce ? A l'aide d'un bilan d'énergie thermique appliqué à la pièce, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$ dans la pièce en fonction de C et de P .

- 2) Résoudre l'équation sachant que la température initiale de la pièce est $T_0 = 10^\circ\text{C}$. Tracer $T(t)$. Déterminer la durée nécessaire pour atteindre la température finale $T_f = 20^\circ\text{C}$.
- 3) Proposer un modèle électrique simple conduisant à une équation différentielle du même type. Préciser quelles sont les grandeurs électriques associées aux grandeurs thermodynamiques que sont $T(t)$, C et P . Dessiner le montage électrique analogue.

9.1.1.2 Influence des murs

La pièce est constituée d'une enceinte en béton d'épaisseur $L = 15\text{cm}$ et de masse volumique $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. On note $c = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique ($\lambda = 1,5 \text{ SI}$).

- 4) Exprimer l'aire S_p de la surface en contact avec la pièce en fonction de a , b et h , en négligeant l'épaisseur des murs. Exprimer le volume de béton V_b et la capacité thermique C_{mur} de l'enceinte en béton en fonction de S_p , L , ρ et c . Comparer numériquement C_{mur} à la capacité thermique de la pièce C . Par rapport à ces premiers résultats, quels commentaires pouvez-vous faire sur la durée de montée en température de la pièce en prenant en considération l'influence de la capacité thermique du mur ?

9.1.2 Equation de la chaleur

On étudie la conduction thermique dans le mur modélisé par une barre de section S , de longueur L en contact avec deux thermostats de températures T_{int} et T_{ext} (voir figure 3).

On note : $\vec{j} = j(x,t)\vec{u}_x$ le vecteur densité de flux thermique.

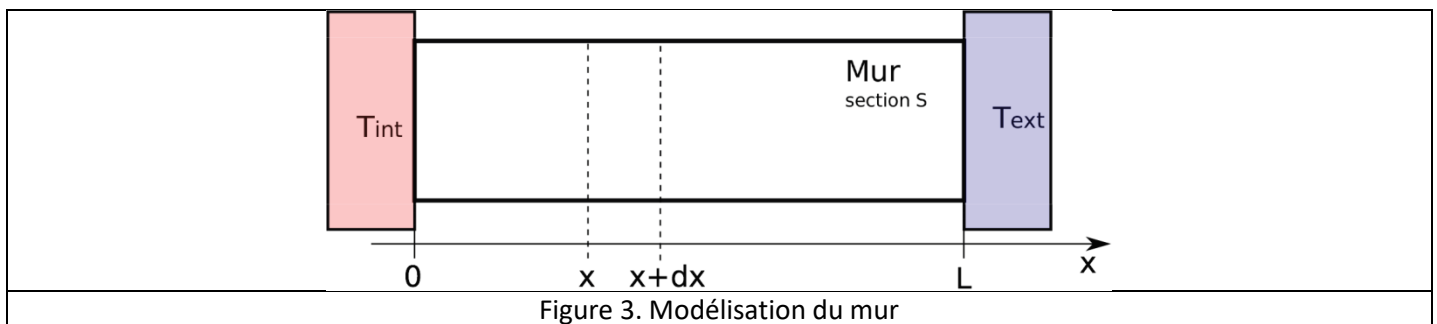


Figure 3. Modélisation du mur

9.1.2.1 Généralités

- 5) Rappeler la loi de Fourier. Interpréter son signe. Donner une signification physique de $j(x,t)$ et préciser son unité. Quelle est la dimension de la conductivité thermique ? En déduire son unité dans le système international.
- 6) A l'aide d'un bilan d'énergie thermique sur la tranche comprise entre les abscisses x et $x+dx$ du mur, établir l'équation de diffusion thermique c'est-à-dire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(x,t)$ à l'intérieur du mur en fonction de ρ , c , et λ .

9.1.2.2 Etude du régime stationnaire

- 7) Rappeler la signification de « régime stationnaire ». Les températures de surface seront prises égales à celles des thermostats. Résoudre l'équation de la diffusion thermique et déterminer alors $T(x)$ la température à l'intérieur du mur à l'abscisse x . Tracer $T(x)$.
- 8) Définir et exprimer la température moyenne du mur notée T_{moy} . Indiquer la position particulière x_p où la température est égale à la température moyenne.
- 9) Exprimer la densité de flux $j(x)$ qui traverse le mur. Que remarquez-vous ?
- 10) Calculer la puissance P que le radiateur doit fournir afin de maintenir la température intérieure à 20°C pour une température extérieure de 10°C . Commenter ce résultat par rapport au radiateur installé.

9.1.2.3 Résistance thermique

On définit en électricité la résistance d'un conducteur ohmique en convention récepteur par $R = \frac{\Delta V}{I}$ où ΔV est la différence de potentiels aux bornes de la résistance et I l'intensité du courant électrique qui traverse le conducteur (figure 4).

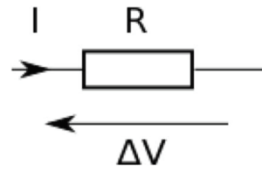


Figure 4. Résistance

11) En faisant une analogie, indiquer à quelles grandeurs thermodynamiques sont analogues la conductivité électrique, la densité de courant électrique, le potentiel électrique et l'intensité du courant. Donner cette réponse sous la forme d'un tableau récapitulatif. Donner l'expression de la résistance thermique R_{mur} du mur étudié. Préciser son unité et calculer sa valeur.

9.2 Centrale TSI 2016

On étudie maintenant le phénomène de diffusion thermique dans l'eau des seaux. On modélise le serpentin par un conducteur de cuivre compris entre les cylindres de hauteur H et de rayons R' et $R > R'$ (figure 7). L'intérieur ($r < R'$) est rempli d'eau de conductivité thermique λ_e , de capacité thermique massique c_e et masse volumique ρ_e grandeurs supposées constantes. On suppose que la température dans le conducteur de cuivre est constante égale à T_c . L'eau est initialement à la température T_0 . On suppose que le champ de température dans l'eau est fonction de la distance r à l'axe Oz et du temps t . La conductivité thermique de la glace est $\lambda_g = 2,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et celle de l'eau liquide $\lambda_e = 0,60 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

On donne $R' = 4 \text{ cm}$, $R = 4,2 \text{ cm}$, $H = 15 \text{ cm}$, $c_e = 4,2 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $\rho_e = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

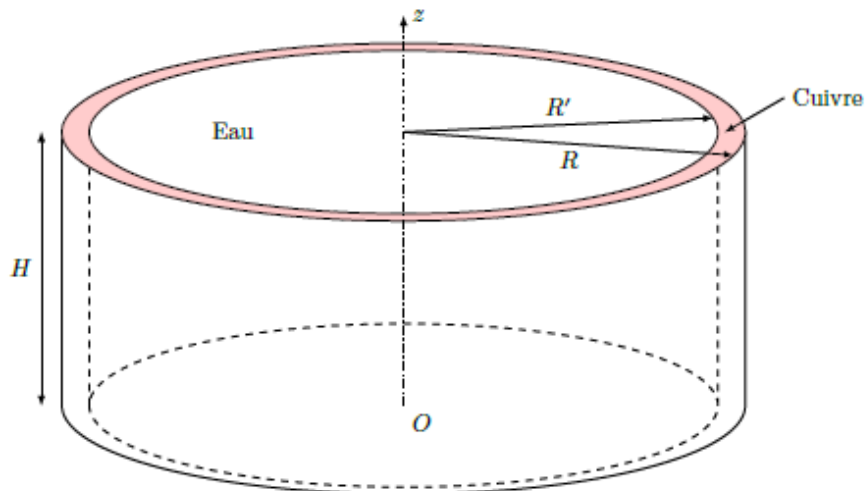


Figure 7 Diffusion thermique

I.B.5) Établir l'équation de diffusion thermique vérifiée par la température $T(r, t)$ dans l'eau à partir d'un bilan enthalpique sur un système élémentaire que l'on précisera et de la loi de Fourier que l'on commentera. On ne prendra en compte ici que le phénomène de diffusion thermique.

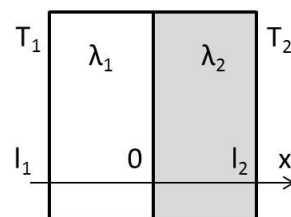
I.B.6) En évaluant une durée caractéristique, justifier la nécessité de remuer l'eau.

10 Exercices type oral

10.1 Contacts thermiques

Lorsqu'on touche deux objets à la même température, l'un en bois et l'autre en métal, celui en métal semble plus froid que celui en bois, malgré leurs températures identiques. L'objet de ce problème est d'étudier ce phénomène.

On étudie la conduction thermique suivant $\vec{u}_x$ entre deux solides 1 et 2, de même section S , portés aux températures extrêmes T_1 et T_2 :



- 1) Etablir l'expression de la température $T(x)$, $x \in [l_1, l_2]$.
 - 2) Etablir la valeur de la température T_0 de la jonction en fonction de T_1 et T_2 .
 - 3) Calculer numériquement T_0 pour un contact 1/2 métal/peau puis bois/peau (on prendra $l_1 = l_2$) où $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $T_2 = 37^\circ\text{C}$. Conclure quant à la sensation de froid.
- On pose R_{th1} et R_{th2} les résistances thermiques relatives aux solides 1 et 2.
- 4) Comment exprimer ces résistances en fonction de l_1 , l_2 , λ_1 , λ_2 et S , la surface en contact des deux solides ?
 - 5) Etablir la valeur de la température T_0 de la jonction en fonction de T_1 , T_2 , R_{th1} et R_{th2} .
 - 6) Envisager et commenter les cas $R_{th1} \gg R_{th2}$ et $R_{th1} = R_{th2}$.
 - 7) Comparer avec les résultats de l'exercice précédent.

Données :

	métal	corps humain	bois
$\lambda (W.m^{-1}.K^{-1})$	350	$6,0.10^{-1}$	$7,5.10^{-1}$

10.2 Bilan entropique macroscopique

Les extrémités d'un cylindre C de section S , de longueur l , de conductivité thermique λ , sont portées aux températures $T(0) = T_1$ et $T(l) = T_2$. Les parois du cylindre sont parfaitement calorifugées. L'étude a lieu en régime permanent indépendant du temps. Toutes les réponses sont attendues en fonction de T_1 , T_2 , λ , S et l .

- 1) $\vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x$ avec $j_{th} > 0$: quelle est l'inégalité entre T_1 et T_2 ?
- 2) Quel est le flux thermique Φ traversant une section droite de C ?
- 3) Quelle est la variation d'entropie dS de C pendant la durée dt ?
- 4) Quelle est l'entropie δS_{ech} échangée par C avec les sources extérieures à T_1 et T_2 pendant dt ?
- 5) Quelle est l'entropie $\delta S_{créé}$ dans C pendant dt ? Conclure.

10.3 Simple et double vitrage

On considère une pièce à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$. La température extérieure est $T_e = 5^\circ\text{C}$. On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda = 1,15 W.m^{-1}.K^{-1}$, de largeur 60 cm, de hauteur 60 cm et d'épaisseur 3 mm. On suppose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers les autres parois de la pièce. On se place en régime stationnaire.

- 1) Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant à travers le simple vitrage.
- 2) On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué d'une vitre de 3 mm d'épaisseur, d'une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{air} = 0,025 W.m^{-1}.K^{-1}$, d'épaisseur 10 mm et d'une autre vitre identique à la première. Donner le schéma thermique équivalent. Calculer le flux thermique sortant à travers le double vitrage et les différentes températures dans le double vitrage. Interpréter.

10.4 Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^\circ\text{C}$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_{th1} = 10,0 \cdot 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_{th2} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10^\circ\text{C}$. On se place en régime stationnaire.

- 1) Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenant constante la température.
- 2) On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique.

10.5 Isolant

Une couche d'isolant d'épaisseur $d = 10\text{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 0,04 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ a une face maintenue à la température $T_1 = 100^\circ\text{C}$. L'autre face est refroidie par convection par un courant d'air à $T_0 = 25^\circ\text{C}$ qui doit maintenir sa température à la valeur de $T_s = 30^\circ\text{C}$ (en régime permanent).

Calculer quelle doit être la valeur du coefficient h défini dans la loi de Newton : $j_N = h(T_s - T_0)$. On résoudra d'abord le problème sans faire appel à la notion de résistances thermiques, puis en les utilisant. Quel paramètre peut-on adapter simplement pour obtenir cette valeur ?

10.6 Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5\text{mm}$, de longueur L . En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330\text{K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300\text{K}$. On appelle $\lambda = 400 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie.

On rappelle la loi de Newton :

La densité de flux thermique sortant à travers la surface d'un solide en contact avec un fluide est proportionnelle à l'écart entre la température T_s de la surface du solide et le température T_0 du fluide : $j_N = h(T_s - T_0)$

- 1) Faire un schéma en explicitant le bilan de puissance en régime stationnaire.
- 2) Déterminer le profil de température $T(x)$ en tout point de la barre de cuivre.