

Devoir Surveillé 3

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions et d'y répondre dans l'ordre sur sa copie.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Toutes les aides aux applications numériques se trouvent en fin de sujet.

ATTENTION : - La rédaction doit être faite à l'encre noire ou bleue. Les couleurs doivent être réservées à l'encadrement des résultats et/ou les schémas.
- Les encres vertes et violettes sont interdites.
- Sont interdits également : les stylos plumes, les correcteurs type « Typex » ou « blanco », les stylos à friction.

Partie I – L'alimentation en électricité

Ce problème est composé de 3 parties indépendantes. La première aborde la réalisation d'un transformateur, la seconde l'alimentation par câble coaxial et la dernière la génération d'un signal oscillant.

On notera μ_0 et ε_0 la perméabilité et la permittivité du vide respectivement avec :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H.m}^{-1} \text{ et } \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F.m}^{-1}$$

I.A) Transformateur torique

On étudie ici un modèle simplifié de transformateur schématisé en Figure 1. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R . On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ illustrée pour un point M quelconque sur le schéma.

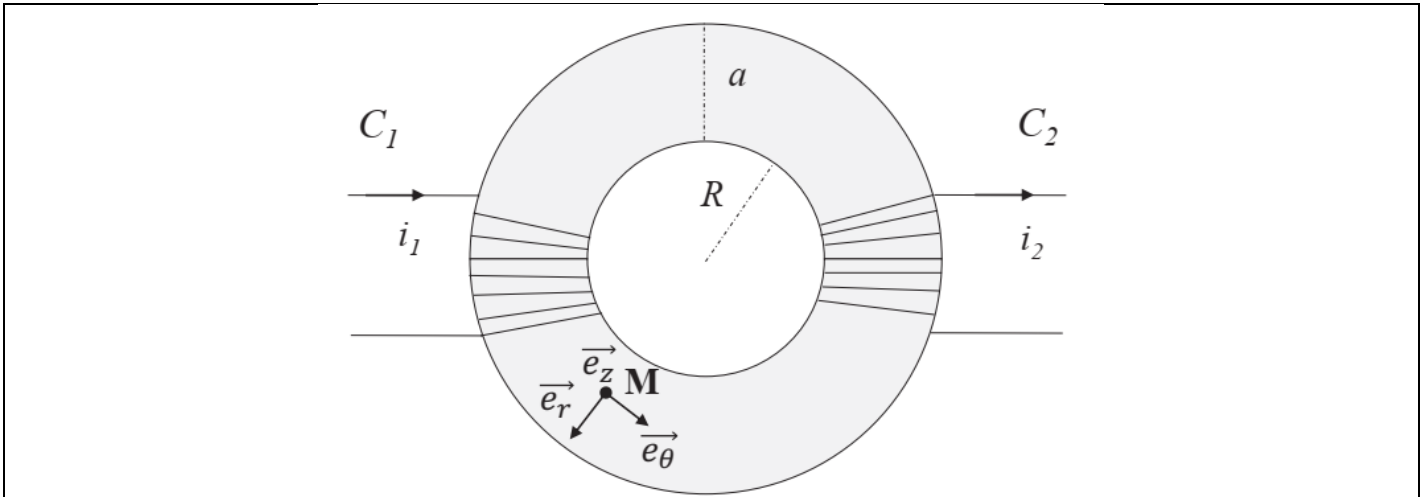


Figure 1. Vue de dessus du transformateur

Le bobinage dit « primaire » noté C_1 est enroulé en N_1 spires tout autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Le bobinage dit « secondaire » noté C_2 est, de la même manière, enroulé en N_2 spires régulièrement réparties tout autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité i_2 .

1) Rappeler les équations de Maxwell dans le vide. On précisera avec rigueur les termes, ainsi que leurs unités, les composant.

2) Justifier soigneusement que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans C_1 est de la forme :

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z)\vec{e}_\theta$$

3) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour Γ soigneusement précisé, démontrer que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le circuit C_1 en tout point à l'intérieur du tore est donné par :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

4) Que nous dit l'équation de Maxwell-Flux (Thomson) sur le flux du champ magnétique ?

5) Etablir l'expression du flux magnétique ϕ du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers une spire du circuit C_1 . Pourquoi n'est-il pas nul ?

6) En déduire le flux total ϕ_1 au travers des N_1 spires du circuit C_1 .

7) Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance). En déduire que l'inductance propre L_1 du circuit C_1 est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

8) Quelle est alors l'expression de l'inductance propre L_2 du circuit C_2 ?

9) Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M . Démontrer que ce coefficient M est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

10) Quel phénomène entraîne l'apparition d'une force électromotrice e_1 dans le primaire ? Exprimer alors e_1 en fonction de L_1 et $\frac{di_1}{dt}$ en précisant la loi utilisée. De quelle équation de Maxwell découle-t-elle ?

11) La résistance des bobinages étant négligée, exprimer la tension u_1 aux bornes du primaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_1 et M .

12) Faire de même pour la tension u_2 aux bornes du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_2 et M .

13) En déduire que l'on a la relation suivante :

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}$$

14) Prouver que cette relation se simplifie pour faire apparaître ce que l'on appelle le rapport de transformation, défini comme le rapport des tensions du secondaire et du primaire :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

15) L'électricité doit être produite et transportée en temps réel jusqu'aux lieux de consommation. Le transport se fait sur un réseau à Très Haute Tension (THT : 225 kV/440 kV) et à Haute Tension (HT : 63 kV/90 kV). L'électricité est ainsi acheminée sur de longues distances et avec un minimum de pertes. Expliquer alors comment les transformateurs constituent des éléments centraux de la chaîne de transport de l'électricité ?

16) Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.

17) Quel peut être l'intérêt d'utiliser un transformateur si les circuits primaire et secondaire comportent le même nombre de spires ?

18) Technologiquement, les matériaux magnétiques des transformateurs sont réalisés en accolant des feuillets en acier. Quel type de pertes cherche-t-on ainsi à éviter ?

I.B) Câble coaxial

Un câble coaxial, comme schématisé en Figure 2, est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon R_2 . L'espace inter-conducteur comporte un isolant, ici assimilé au vide.

On pose : $R_1 = 0,25\text{mm}$, $R_2 = 1,25\text{mm}$ et $l = 100\text{m}$. Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord.

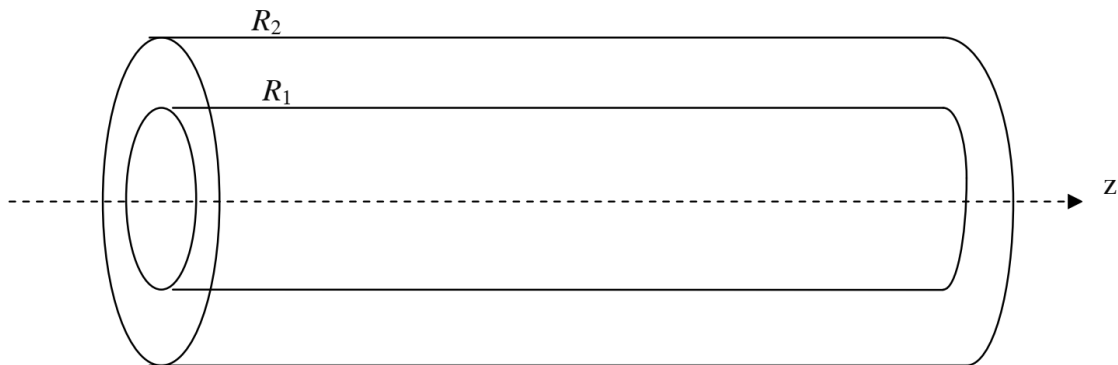


Figure 2. Portion de câble coaxial

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

I.B.1) Capacité linéique

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

19) Justifier que en tout point M de l'espace le champ électrique $\vec{E}$ peut s'écrire sous la forme : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

20) De quelle équation de Maxwell découle le théorème de Gauss ? L'énoncer.

21) En utilisant le théorème de Gauss sur une surface Σ que l'on précisera, exprimer $E(r)$ en fonction de l , r , Q et ϵ_0 dans les trois domaines suivants : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $r > R_2$

22) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 constants. Par un calcul de circulation, exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q , l , R_1 , R_2 et ϵ_0 .

23) On définit la capacité C_l du câble de longueur l par : $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$. Exprimer C_l en fonction de l , R_1 , R_2 et ϵ_0 , puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1 , R_2 et ϵ_0 . Faire l'application numérique.

24) En déduire l'expression de l'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble coaxial de longueur l .

I.B.2) Inductance linéique

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$. Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur.

25) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique $\vec{B}$. Justifier que : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

26) De quelle équation de Maxwell découle le théorème d'Ampère ? L'énoncer. Pourquoi peut-on l'appliquer ici ?

27) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours Γ que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction de I_0 , r et μ_0 .

28) On montre que l'énergie magnétique W_m emmagasinée dans le câble coaxial (volume inter-conducteur) s'écrit :

$$W_m = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) I_0^2$$

Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 et l .

29) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0 , R_1 et R_2 . Faire l'application numérique.

I.B.3) Conclusion

Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux tout en assurant une protection contre les perturbations extérieures.

30) D'après les calculs menés précédemment, expliquer en quoi le câble coaxial permet de protéger le signal transmis des perturbations extérieures.

I.C) Oscillateurs

Nous nous intéressons dans ce problème aux oscillateurs, systèmes électroniques au cœur de très nombreux objets qui nous entourent au quotidien : montre, voiture, radio, ordinateur, etc... Quelle que soit l'application, l'objectif d'un oscillateur est le même : générer un signal de période stable, de caractéristiques spectrales choisies, sans aucun signal d'entrée. Deux réalisations sont proposées dans ce problème : en première partie, un oscillateur quasi-sinusoïdal et en seconde partie un oscillateur à relaxation.

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

I.C.1) Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoïdal

Il est parfois intéressant d'avoir des systèmes électroniques instables, notamment en électronique, pour pouvoir réaliser des oscillateurs. On rappelle que ce type de structure peut être réalisé en associant un amplificateur et un filtre comme présenté en Figure 3.

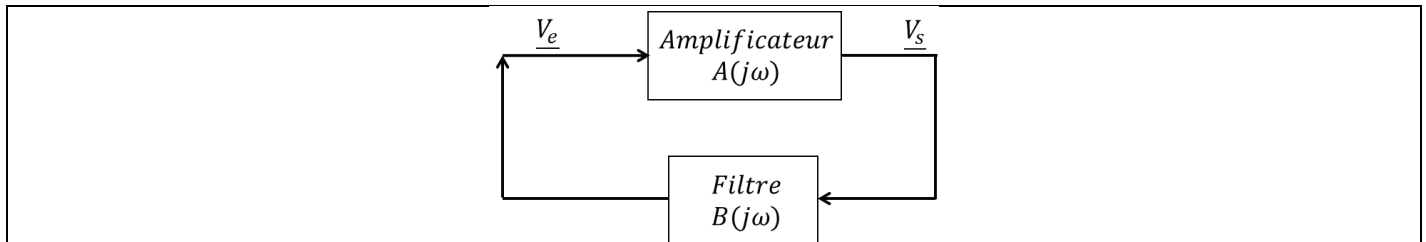


Figure 3. Structure d'un oscillateur à réaction

Nous étudions dans cette partie l'oscillateur à filtre de Wien (Figure 4).

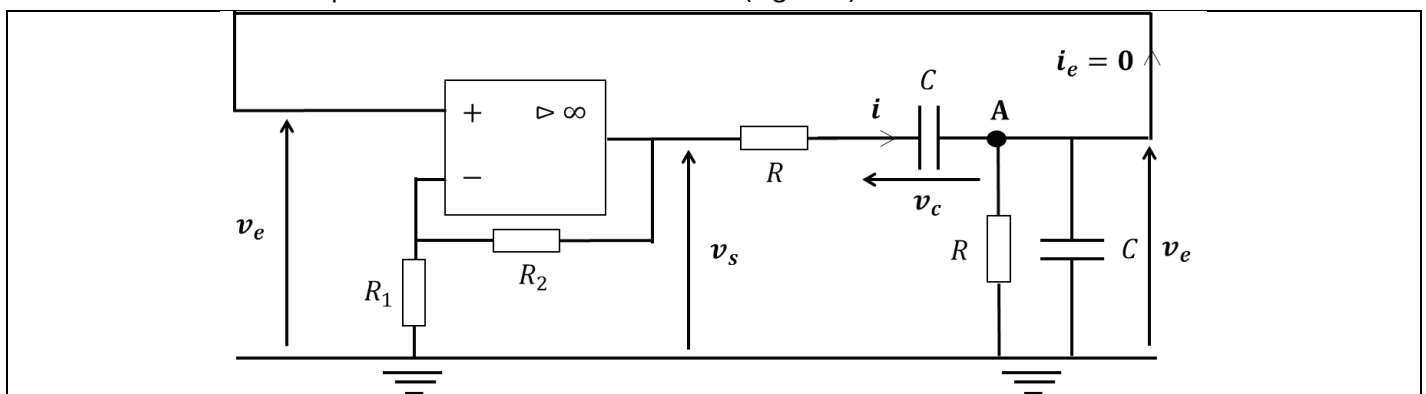


Figure 4. Schéma électrique de l'oscillateur à filtre de Wien

A) Généralités

31) Reproduire le schéma sur votre copie et identifier la partie amplificatrice ainsi que la partie filtre de cet oscillateur.

32) Justifier pourquoi le courant noté i_e sur le schéma peut être considéré comme nul dans la suite de l'étude.

B) Etude du filtre de Wien

33) Quelle est la relation entre la dérivée de la tension v_c aux bornes du condensateur par rapport au temps et le courant i le traversant ?

34) Par une loi des nœuds au point A, exprimer le courant i en fonction de la tension v_e et de sa dérivée par rapport au temps.

35) Par une loi des mailles, exprimer la tension v_s en fonction de v_e , R , i et v_c .

36) En utilisant les équations précédentes (Q33 et Q34), montrer que l'on obtient l'expression suivante en précisant l'expression de la constante de temps τ :

$$\frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau}$$

C) Amplificateur

37) En étudiant le fonctionnement de l'amplificateur linéaire intégré présent dans le schéma (Figure 4), en déduire la valeur de l'amplification $A = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction des résistances R_1 et R_2 .

D) Conditions d'oscillation

38) Montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par la tension v_s en fonction de τ et de l'amplification A :

$$\tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau(3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0$$

39) Par analyse de cette équation, quelle condition doit-on satisfaire pour obtenir une oscillation harmonique ? Quelle est alors la fréquence d'oscillation que l'on notera f_0 ?

E) Qualité du signal fourni

Nous nous intéressons à présent à la qualité du signal fourni par cet oscillateur. En Figure 5 et 6 sont présentées l'allure temporelle de la tension v_e ainsi que sa décomposition spectrale.

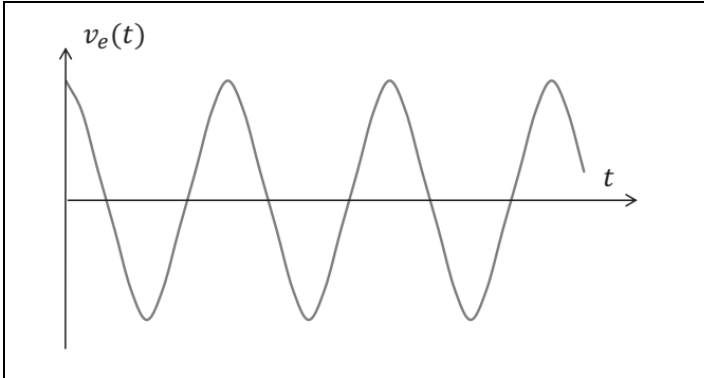


Figure 5. Allure temporelle de la tension v_e

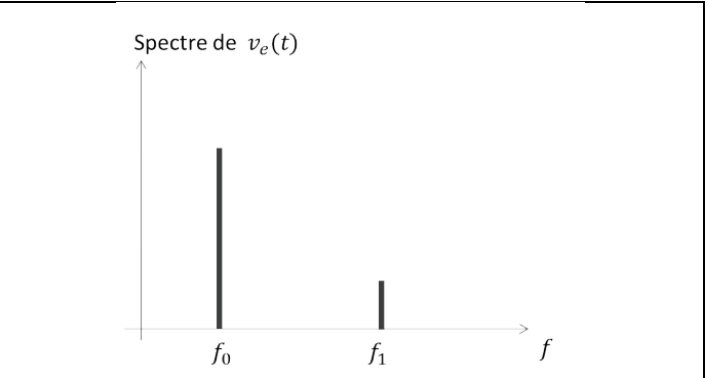


Figure 6. Décomposition spectrale de la tension v_e .
 $f_0 = 1\text{kHz}$ et $f_1 = 10\text{kHz}$

40) Peut-on considérer le signal fourni comme sinusoïdal ? Justifier. Comment pourrait-on améliorer la qualité de la tension v_e ? Une approche pratique est attendue en précisant les valeurs caractéristiques du dispositif mis en œuvre.

I.C.2) Oscillateur à relaxation

Si l'on cherche à réaliser un signal d'horloge, il n'est pas nécessaire d'obtenir un signal sinusoïdal. On peut alors utiliser la structure de l'oscillateur à relaxation présentée en Figure 7.

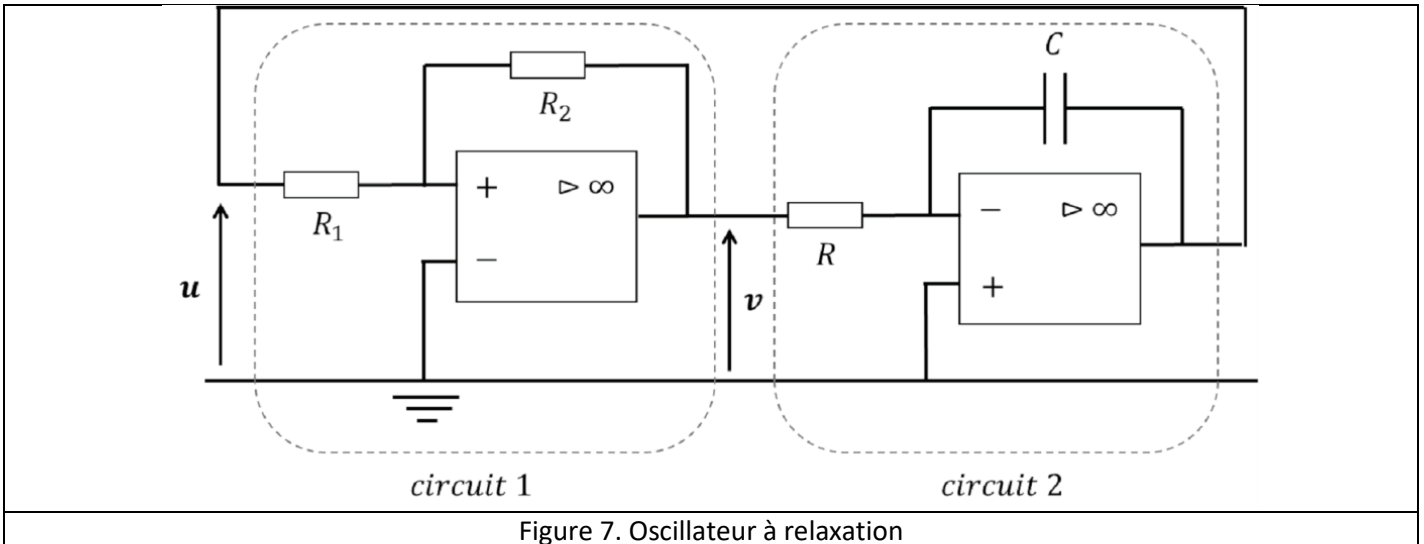


Figure 7. Oscillateur à relaxation

On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ leurs tensions de saturation. A $t = 0\text{s}$, on suppose que la tension v vaut $+V_{sat}$ et que la tension u est nulle.

A) Circuit 1

41) Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Quelles sont les valeurs que peut prendre la sortie v ? Pour quelle valeur de la tension d'entrée u , notée u_{seuil1} , la tension de sortie v bascule-t-elle de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$?

On admet que la tension de sortie v bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ pour une valeur de tension u_{seuil2} telle que $u_{seuil2} = -u_{seuil1}$.

42) Tracer la tension v en fonction de la tension u en annotant soigneusement le tracé.

B) Circuit 2

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur. On admet la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC}$$

43) Si la tension v est constante et vaut $+V_{sat}$, quelle est l'allure du signal d'entrée u ?

C) Montage complet

Etudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions u et v sont donnés en Figure 8.

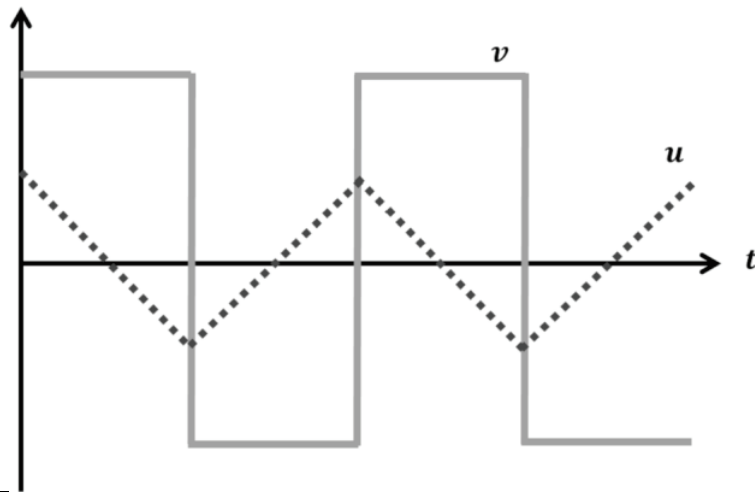


Figure 8. Allures temporelles des signaux issus de l'oscillateur à relaxation

44) Exprimer la fréquence f de la tension u en fonction de R_1 , R_2 , R et C .

Partie II – Le silicium

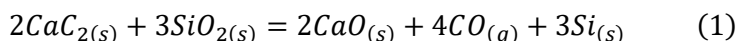
La plupart des circuits intégrés (comme les ALI) utilisent des matériaux de type semi-conducteurs, comme le silicium. On s'intéresse dans un premier temps à sa production, puis dans une deuxième partie à la réalisation d'une diode au silicium.

II.A) Production du silicium

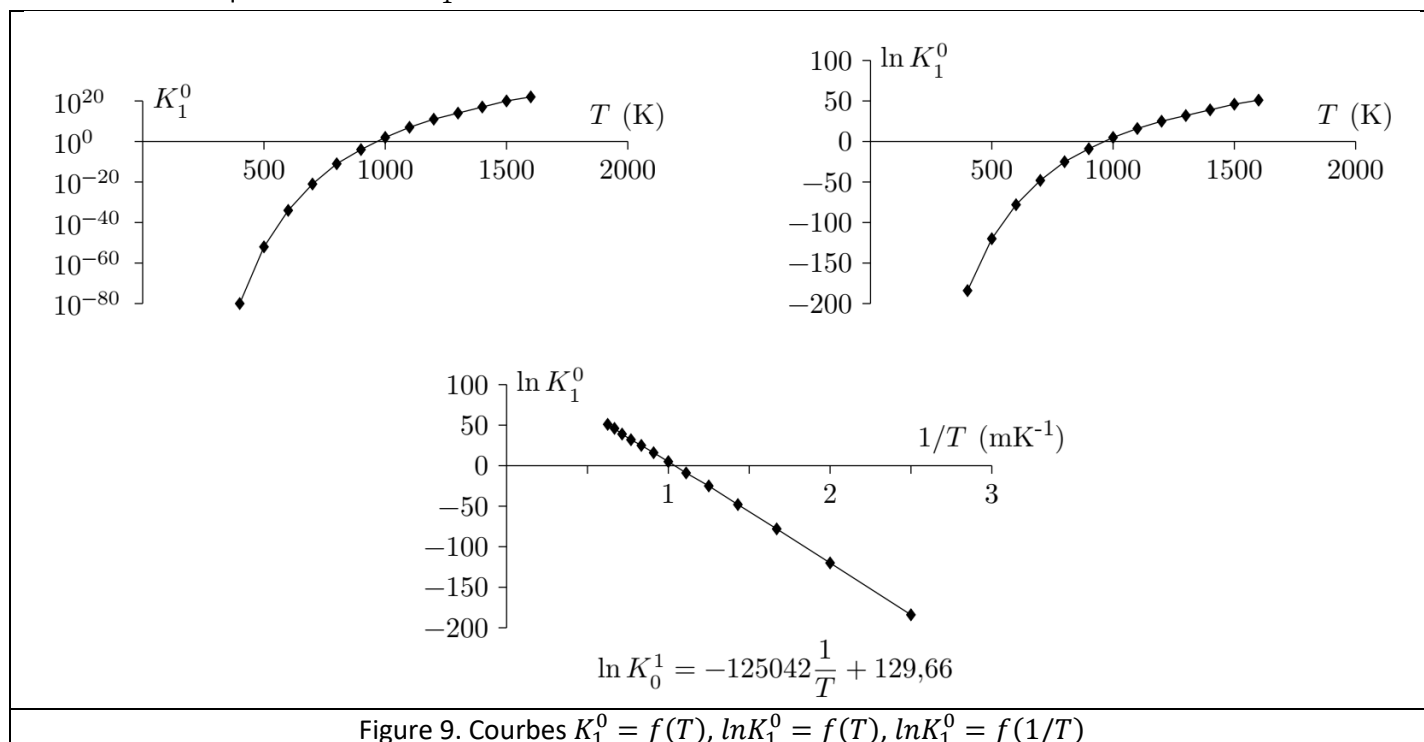
II.A.1) Réduction du dioxyde de silicium

Pour produire le silicium, on réduit le dioxyde de silicium SiO_2 par le carbure de calcium $CaC_{2(s)}$. Pour $T < 1683K$, aucun changement d'état n'intervient.

L'équation de la réaction est :



Sa constante d'équilibre est noté K_1^0 .



45) À l'aide de la Figure 9, déterminer le signe de l'enthalpie standard $\Delta_r H_1^0$ de la réaction (1) puis sa valeur en la supposant indépendante de la température.

46) Quelle est l'influence d'une augmentation de la température à pression et composition constante ? Justifier. En déduire si l'industriel a intérêt à travailler à basse ou haute température.

II.A.2) A une température plus élevée

Dans un réacteur de volume constant 8 litres, préalablement vide, on introduit 18 g de SiO_2 solide et 32 g de CaC_2 solide. On opère à $T = 1730K > 1683K$. On suppose que la phase gazeuse est assimilable à un gaz parfait.

47) Ecrire l'équation de la réaction entre $SiO_{2(s)}$ et $CaC_{2(s)}$ que l'on notera (1') en précisant les états physiques des espèces chimiques.

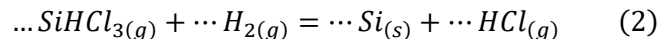
48) Sachant que la constante d'équilibre de la réaction (1') vaut : $K_1^0(1730K) = 3,68 \times 10^{24}$, calculer la pression du système si l'équilibre est atteint puis la quantité de matière de monoxyde de carbone formé. Conclure.

49) En déduire les quantités de matière des différentes espèces chimiques à l'état final, ainsi que la pression de la phase gazeuse (supposée parfaite).

II.A.3) Distillation du trichlorosilane

Le silicium obtenu est mis en réaction avec du chlorure d'hydrogène gazeux HCl à $300^\circ C$. On forme majoritairement le trichlorosilane $SiHCl_3$ mais également le dichlorosilane SiH_2Cl_2 . Après refroidissement à $15^\circ C$, on obtient un mélange liquide de $SiHCl_3$ et de SiH_2Cl_2 de composition molaire 80% en $SiHCl_3$. Une distillation fractionnée permet alors de purifier le trichlorosilane $SiHCl_3$.

Le trichlorosilane ultra-pur est réduit par l'hydrogène vers 1000°C, selon la réaction :



Le silicium ultra-pur, produit par cette réaction, est ensuite déposé sur un barreau de silicium.

50) Ajuster les nombres stœchiométriques de l'équation (2).

51) Que valent à 298K les enthalpies standards de formation de $H_{2(g)}$ et $Si_{(s)}$?

52) Calculer l'enthalpie standard $\Delta_r H_2^0$ de la réaction à 298K.

53) La réaction est réalisée à la pression $P = 0,1 \text{ bar}$. Justifier le choix de la pression égale à 0,1 bar plutôt que 1,0 bar à température fixée.

Données :

Extrait du tableau périodique des éléments :

	H	C	N	O	Al	Si	Cl	Ca
Numéro atomique	1	6	7	8	13	14	17	20
Masse molaire ($g \cdot mol^{-1}$)	1,01	12,0	14,0	16,0	27,0	28,1	35,5	40,1

Relation de Van't Hoff :

$$\frac{d \ln K^0(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0(T)}{RT^2}$$

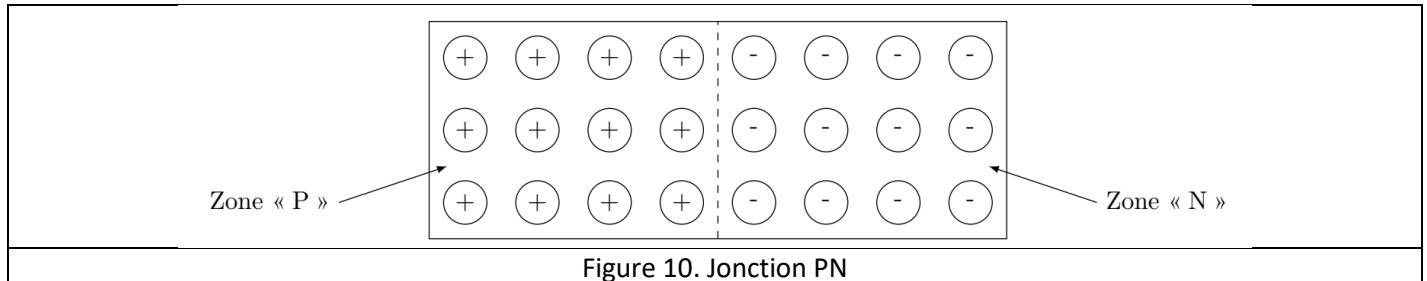
Données thermodynamiques :

	$Si_{(s)}$	$SiO_{2(s)}$	$SiHCl_{3(g)}$	$H_{2(g)}$	$HCl_{(g)}$	$CaC_{2(s)}$	$CaO_{(s)}$
Température de fusion T_{fusion} (K)	1683	1883	139	14	159	2430	2886
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^0$ ($kJ \cdot mol^{-1}$)	?	-911	-488,5	?	-92,3	-63	-635

II.B) Etude d'une diode au silicium

Une diode au silicium est en fait constituée d'une jonction de deux semi-conducteurs dopés, l'un de type « P » et l'autre de type « N ».

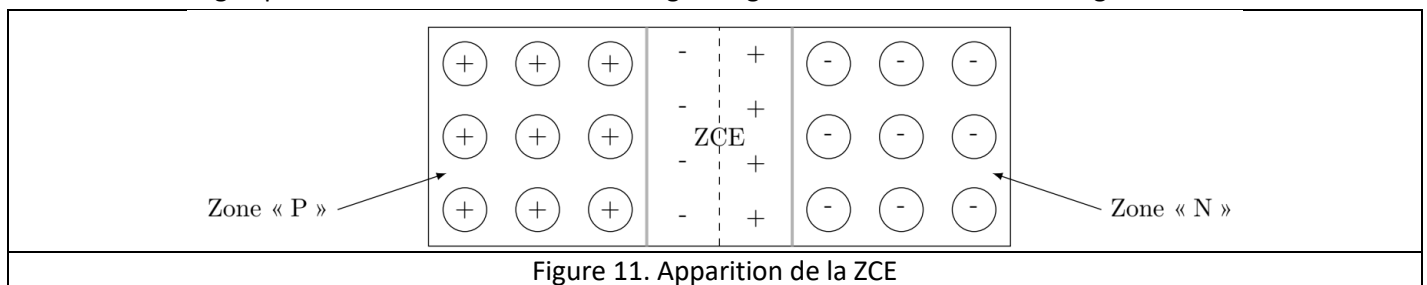
Dans ces deux zones, on ajoute, en quantité limitée, des impuretés dans le silicium de telle façon que la zone « N » contient une majorité d'électrons et une minorité de trous « + » (d'où sa charge négative) alors que la zone « P » contient une majorité de trous « + » et une minorité d'électrons (d'où sa charge positive) comme illustré Figure 10 où seuls les porteurs majoritaires ont été représentés.



La proximité de ces deux zones va entraîner une migration des trous vers la zone « N » ainsi que des électrons vers la zone « P ».

Lorsqu'un électron migre vers la zone « P », il va se recombiner avec un trou et cela entraîne l'apparition d'un trou dans la zone « N » ; un raisonnement analogue peut être tenu en ce qui concerne la migration d'un trou « P » vers la zone « N ».

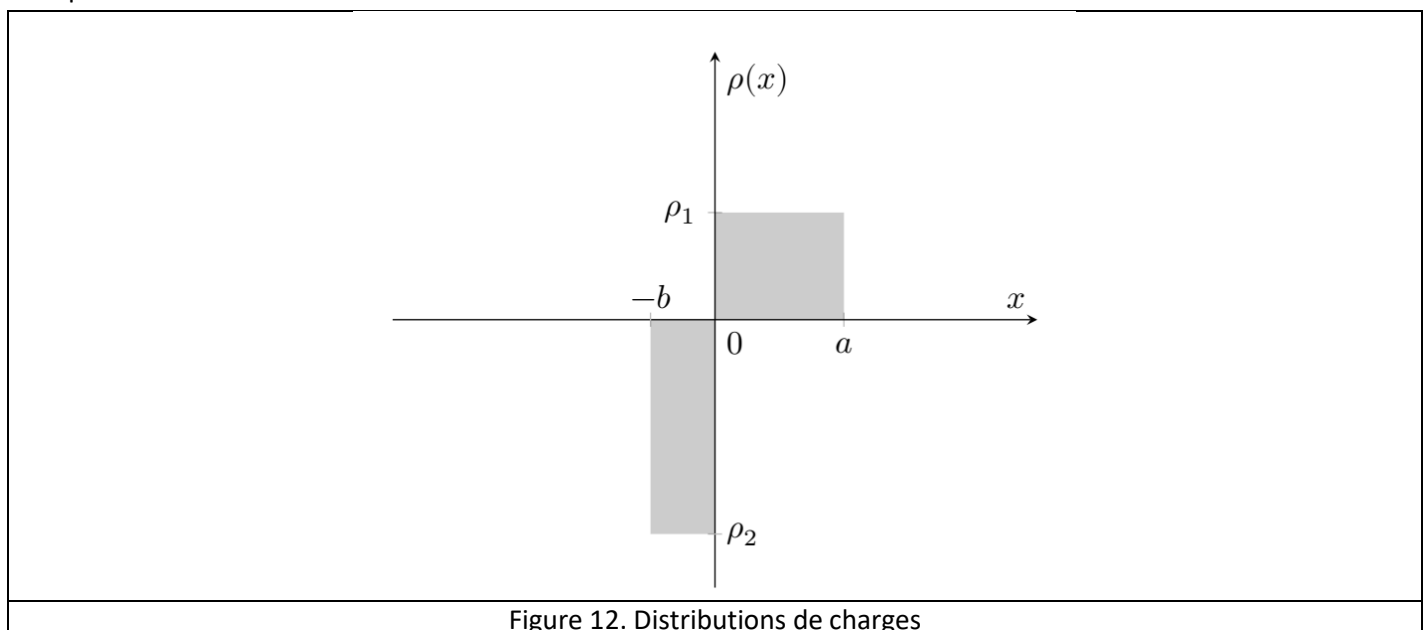
Tout ceci entraîne une zone appelée zone de charge d'espace, notée ZCE, dans laquelle la zone « N » se trouve localement chargée positivement et la zone « P » chargée négativement comme illustré Figure 11.



54) Préciser pourquoi la ZCE est nécessairement limitée dans l'espace.

On se propose d'étudier le vecteur champ électrostatique dans la ZCE.

La zone de charge d'espace est modélisée par deux distributions uniformes (Figure 12), l'une de densité volumique $\rho_1 > 0$ entre les plans d'équations $x = 0$ et $x = a$, l'autre de densité volumique $\rho_2 < 0$ située entre les plans d'équations $x = -b$ et $x = 0$.



55) La ZCE étant globalement neutre, déterminer la relation entre a , b , ρ_1 et ρ_2 .

56) On considère le cas d'une distribution uniforme de densité volumique ρ_0 comprise entre les plans d'équations $x = -\frac{d}{2}$ et $x = +\frac{d}{2}$ où d est une largeur. Démontrer soigneusement que le vecteur champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace est de la forme :

$$\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$$

57) A l'aide du théorème de Gauss, déterminer soigneusement l'expression de $E(x)$ en tout point de l'espace. On montrera en particulier que :

$$E(x) = \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} \text{ si } |x| < \frac{d}{2}$$

58) À l'aide du principe de superposition, déterminer le vecteur champ électrostatique en tout point M de la ZCE précédemment décrite. On exprimera $E(x)$ en fonction de x , ρ_1 , a et b .

59) Représenter les variations de $E(x)$ pour x variant de $-b$ à a .

60) À l'aide de l'étude précédente, indiquer la valeur minimale de la tension $U = V_P - V_N$ à appliquer afin qu'un courant circule dans la diode.

Aide aux calculs

$\ln(5,0) = 1,61$	$2 \times \pi \times 8,85 = 55,6$	$\frac{55,6}{1,61} = 34,5$
$8,31 \times 125042 = 1,04.10^6$	$(3,68)^{0,25} = 1,39$	$\frac{1,39 \times 8}{8,31 \times 1730} = 7,73.10^{-4}$
$\frac{18}{60,1} = 0,30$	$\frac{32}{64,1} = 0,50$	$\frac{0,40 \times 8,31 \times 1730}{8} = 719$