

Equations de Maxwell

Extrait du programme

Les équations de Maxwell sont présentées dans la partie **3**. Elles permettent une première approche quantitative du phénomène de propagation et, également, de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en première année.

Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents).	Comparer une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. Approche numérique : mettre en oeuvre une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données.

Sommaire

- 1 Opérateurs différentiels**
 - 1.1 Le gradient
 - 1.2 La divergence
 - 1.3 Le rotationnel
 - 1.4 Le laplacien
 - 1.5 Identités vectorielles
- 2 Principe de conservation de la charge**
- 3 Equations de Maxwell dans le vide**
 - 3.1 Formes locales
 - 3.2 Formes intégrales et interprétation
 - 3.3 Equations de Maxwell dans une région vide de charges et de courants
- 4 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)**
 - 4.1 Conditions de validité
 - 4.2 Equations de Maxwell dans un conducteur, dans le cadre de l'ARQS
 - 4.3 Cas particulier des régimes stationnaires (ou permanents)
 - 4.4 Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique
- 5 Résolution numérique de l'équation de Laplace**
 - 5.1 Introduction
 - 5.2 Equations aux dérivées partielles
 - 5.3 Résolution de l'équation de Laplace à 1 dimension
 - 5.4 Résolution numérique de l'équation de Laplace à 2 dimensions
 - 5.5 Exercice
 - 5.6 Lien utile
- 6 Questions de cours**
- 7 Questions à choix multiples**
- 8 Exercices d'application directe du cours**
 - 8.1 Calcul d'une densité de charge
 - 8.2 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique
 - 8.3 Champ magnétostatique tourbillonnaire
 - 8.4 Champ électromagnétique
 - 8.5 Courants électriques et courants de déplacement
 - 8.6 Piège électrostatique
- 9 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 20/01/2020)**

Les équations de Maxwell permettent de résumer sous forme de quatre équations tous les phénomènes liés à l'électromagnétisme. Ce sont des équations locales mettant en jeu des opérateurs différentiels.

1 Opérateurs différentiels

1.1 Le gradient

Définition :

Le gradient permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ scalaire.

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(m) = \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)\vec{u}_z$$

Interprétation physique : Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(m)$ est normal aux surfaces de niveau ($m = \text{cte}$). Il est dirigé vers les valeurs croissantes de m .

Définition :

Un champ de vecteur \vec{a} est dit champ de gradient si il existe une fonction scalaire m telle que : $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}(m)$
 m est appelé potentiel scalaire du champ \vec{a} et est défini à une constante additive près.

Alors pour tout contour fermé, on a : $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = 0$

1.2 La divergence

Définition :

La divergence permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ de vecteur.

En coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$

Interprétation physique : Le signe de la divergence de \vec{a} calculée en un point est lié au caractère convergent ou divergent des lignes de champs à partir de ce point.

Théorème de Green-Ostrogradsky :

Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur \vec{a} . Si les dérivées partielles de \vec{a} sont bornées dans V alors : $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\text{div}\vec{a})dV$

Interprétation physique : La divergence représente le flux sortant d'une surface fermée localement par unité de volume.

1.3 Le rotationnel

Définition :

Le rotationnel permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Interprétation physique : Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

Moyen mnémotechnique : (en coordonnées cartésiennes) : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

Définition :

Un champ de vecteur \vec{b} est dit champ de rotationnel si il existe un vecteur \vec{a} tel que : $\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})$
 \vec{a} est appelé potentiel vecteur du champ \vec{b} et est défini à un gradient près.

Alors pour toute surface fermée, on a : $\oint_S \vec{b} \cdot d\vec{S} = 0$

Théorème de Stokes :

Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ de vecteur \vec{a} , alors : $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$

Interprétation physique :

Le rotationnel représente la circulation le long d'un contour fermé localement par unité de surface.

1.4 Le laplacienDéfinition :

Le laplacien permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ scalaire.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta m = \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \right)$$

Le laplacien permet aussi de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\Delta}(\vec{a}) = (\Delta a_x)\vec{u}_x + (\Delta a_y)\vec{u}_y + (\Delta a_z)\vec{u}_z$$

Interprétation physique :

L'équation de Laplace $\Delta m = 0$ traduit le fait que la solution m est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage. Par exemple, la hauteur d'une membrane attachée par son bord satisfait l'équation de Laplace. Ceci traduit le fait que la hauteur de la membrane en un point est toujours égale à la moyenne des hauteurs sur un petit cercle centré en ce point.

1.5 Identités vectorielles

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(m)) = \Delta m$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \vec{\Delta}(\vec{a})$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(m)) = \vec{0}$$

5 Résolution numérique de l'équation de Laplace

5.1 Introduction

Vous êtes-vous déjà demandé un jour ce qu'était un modèle ? C'est une représentation simplifiée de la réalité physique.

En toute logique, l'approche expérimentale est la plus réaliste. Cependant elle est la plus coûteuse. Elle peut aussi poser des problèmes d'échelle. De même, elle pose des difficultés liées aux mesures. Les outils de mesures sont intrusifs ce qui peut fausser les résultats et poser des difficultés d'accès à certaines zones.

L'approche théorique demande de modéliser le phénomène physique étudié. En supposant que le modèle est bon à l'échelle étudiée, cette approche a la grande qualité de fournir une solution exacte. Son principal défaut est qu'il est souvent nécessaire de simplifier la géométrie ainsi que la physique de l'objet étudié et son environnement.

Tout comme l'approche théorique, l'approche numérique demande de modéliser le phénomène physique étudié. Contrairement à la première, elle permet de prendre en compte des équations bien plus complexes dont les non linéaires. De même, une géométrie plus complexe et l'évolution temporelle peut être prise en compte. Cependant elle a aussi des limites. Elle implique des erreurs liées à la discrétisation (troncature et convergence) et à la résolution (arrondis). Elle pose aussi des problèmes liés aux conditions limites.

Bien des phénomènes ne sont pas encore bien modélisés de nos jours.

5.2 Equations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de physique.

Les exemples d'EDP scalaires les plus connues :

- L'équation d'onde (exemple en électromagnétisme : $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$)
- L'équation de diffusion (exemple en électromagnétisme : $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$)
- Les équations de Poisson et de Laplace (exemple en électromagnétisme : $\Delta V = 0$)

L'étude théorique des EDP est un vaste domaine en mathématiques qui est hors du cadre de notre étude. Nous nous concentrerons sur une méthode de résolution approchée par des méthodes numériques, dans le cas de l'équation de Laplace.

5.3 Résolution de l'équation de Laplace à 1 dimension

En vue de mettre en évidence le principe, on choisit : - de se placer en dimension 1
- d'employer des coordonnées cartésiennes

- 1) Comment se simplifie l'équation de Laplace si on suppose que le potentiel $V(x, y, z, t)$ ne dépend que de x ?
- 2) Donner un exemple tiré du cours d'électrostatique et pour lequel l'équation de Laplace précédente est vérifiée.
- 3) Résoudre l'équation de Laplace précédente en prenant pour conditions aux limites : $\begin{cases} V(0) = V_0 \\ V(e) = -V_0 \end{cases}$

4) Discrétisation

Pour résoudre numériquement l'équation précédente, il faut d'abord définir le domaine D dans lequel on veut calculer le potentiel $V_i = V(x_i)$ et le nombre fini de points $i \in [1, nl]$ qui divisera l'intérieur du domaine. Le potentiel ne sera alors calculé qu'en ces points. Ce nombre de points représente le maillage du domaine. La distance entre deux points consécutifs est appelé le pas p .

Représenter le domaine D correspondant à l'équation précédente avec $nl = 3$. Exprimer le pas p en fonction de e et nl . Que valent V_0 et V_{nl+1} ?

5) Différences finies

Pour pouvoir calculer le potentiel en ce nombre fini de points, il faut adapter les équations à l'outil numérique. Ainsi, les dérivées partielles sont approchées par des différences finies, basées sur des développements de Taylor.

Rappel du développement de Taylor de la fonction $V(x)$ avec $p \ll 1$:

$$V(x+p) = V(x) + p \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{p^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{p^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + O(p^4)$$

Exprimer $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ en fonction de $V(x+p)$, $V(x-p)$, $V(x)$ et p . En déduire que $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_i$ s'exprime sous la forme :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i}{p^2}$$

Conclure en donnant l'équation de récurrence qui traduit l'équation de Laplace.

6) Résolution : algorithme 1

Un moyen simple de tendre vers la solution consiste à déterminer chaque nouvelle distribution du potentiel à partir de la précédente, selon l'équation récurrente : $V'_i = \frac{V_{i+1} + V_{i-1}}{2}$. L'évolution cesse lorsque le potentiel respecte l'équation de Laplace car alors : $V'_i = V_i$.

En reprenant le cas précédent où $nl = 3$ (Q4), remplir le tableau suivant avec les valeurs de $V_{i,i=1..3}$ pour les 3 premières récurrences. On initialisera les valeurs selon : $V_0 = V_0$ $V_{i,i=1..3} = 0$ $V_4 = -V_0$. En déduire les valeurs vers lesquelles vont converger les $V_{i,i=1..3}$.

A chaque fois qu'une nouvelle valeur de V_i est calculée, elle remplace donc la précédente.

	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4
initialisation	V_0	0	0	0	$-V_0$
1ère récurrence					
2 ^{ème} récurrence					
3 ^{ème} récurrence					
...					
Valeurs finales					

7) On peut reconnaître dans l'équation de récurrence trouvée (Q5) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Si vous savez résoudre cette suite, retrouver les valeurs de convergence des $V_{i,i=1..3}$ (Q6).

8) Programmer, en langage Python, l'algorithme 1 vu en Q6. Pour cela, créer en premier lieu une matrice vierge dans laquelle vont se trouver les valeurs du potentiel, en y incluant les conditions aux limites. Puis, créer une fonction dans laquelle la récurrence sera effectuée et qui renverra la liste finale complétée.

(cf prog1D_numpy_aide.py si besoin d'aide)

Enfin, vous pourrez utiliser les bibliothèques matplotlib.pyplot et numpy pour tracer le potentiel en fonction de x et y .

(cf trace_aide.py si besoin d'aide)

Observer la convergence en fonction de la valeur de eps demandée et du nombre de points nl .

9) Résolution avec matrices (si il reste du temps)

On peut résoudre ce système linéaire de $nl + 2$ équations en passant en notation matricielle. On obtient ainsi le système suivant. Créer les différents matrices et vecteurs sous Python. Puis, demander à Python de résoudre le système linéaire. Pour cela, on pourra utiliser la bibliothèque numpy en utilisant les fonctions `zeros()`, `ones()`, `diag()`, `linalg.solve()`.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \dots \\ V_{nl} \\ V_{nl+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ V_{nl+1} \end{pmatrix}$$

5.4 Résolution numérique de l'équation de Laplace à 2 dimensions

On décide maintenant : - de se placer en dimension 2
- d'employer des coordonnées cartésiennes

Ainsi, on cherchera à résoudre l'équation suivante : $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ avec $V(x, y)$

On peut par exemple se demander comment varie le potentiel entre les deux armatures planes de dimensions finies selon y et infinies selon z d'un condensateur. Les armatures sont espacées de e et de longueur L selon y . L'armature en $x = 0$ est portée au potentiel V_0 et celle en $x = e$ au potentiel $-V_0$. On supposera de plus que le potentiel est nul en $y = 0$ et $y = L$.

10) Représenter cet exemple.

11) Discrétisation

On définit le domaine D à l'intérieur duquel on veut calculer le potentiel $V_{i,j} = V(x_i, y_j)$ en un nombre fini de couples de points (i, j) avec $i \in [1, nl]$ et $j \in [1, nc]$. Représenter le maillage du domaine D pour $nl = nc = 3$. $nl = 3$. Exprimer le pas p_i selon x en fonction de e et nl , puis le pas p_j selon y en fonction de L et nc . Que valent $V_{0,j}$, $V_{nl+1,j}$, $V_{i,0}$ et $V_{i,nc+1}$?

12) Différences finies

Les dérivées partielles de l'équation de Laplace sont approchées par des différences finies, basées sur des développements de Taylor. On prendra à partir de maintenant : $p_i = p_j = p$.

Exprimer $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ en fonction de $V(x+p, y)$, $V(x-p, y)$, $V(x, y)$ et p . Montrer que $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ s'exprime sous la forme :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} - 2V_{i,j}}{p^2}$$

Faire de même pour $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{i,j}$.

Montrer alors que résoudre l'équation de Laplace revient à résoudre le système linéaire suivant en chaque point du domaine D :

$$V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} = 0$$

13) Résolution : algorithme 1

Un moyen simple de tendre vers la solution consiste à déterminer chaque nouvelle distribution du potentiel à partir de la précédente, selon l'équation récurrente : $V'_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}}{4}$. L'évolution cesse lorsque le potentiel respecte l'équation de Laplace car alors : $V'_{i,j} = V_{i,j}$.

Programmer en langage Python cet algorithme. En prenant $nc = nl = 3$ et $V_0 = 10V$, donner les valeurs des $V_{i,j}$ trouvées avec votre programme en remplissant le tableau suivant. Que remarquez-vous ? Tracer le potentiel en fonction de x et y .

(cf prog2D_numpy_aide.py si besoin d'aide)

	j = 0	1	2	3	4
i = 0					
1					
2					
3					
4					

14) Utilisation de la notation matricielle (si il reste du temps)

On peut résoudre ce système linéaire de $N = nl \times nc$ équations en passant en notation matricielle, sous la forme : $AX = B$ où A est une matrice $N \times N$ comportant $nl \times nl$ blocs carrés de dimension $nc \times nc$ et B est un vecteur à N composantes formées à partir des potentiels aux bords (CL).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4
 \end{array} \right)$$

Matrice A

nl blocs
de taille
 $nc \times nc$

Nord	Sud	Ouest	Est
T_{1N}	0	T_{1W}	0
T_{2N}	\vdots	0	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	0
T_{ncN}	0	0	T_{1E}
0	0	T_{2W}	0
\vdots	\vdots	0	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	0
0	0	0	T_{2E}
\vdots	T_{1S}	T_{ncW}	0
\vdots	T_{2S}	0	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	0
0	T_{ncS}	0	T_{ncE}

Vecteur B

Chaque ligne et chaque colonne contient 5 termes non-nuls, sauf celles de numéro nc et $nc - 1$, où apparaissent les 0.

Les valeurs des potentiels aux bords du domaine sont ici notés T_{jp} avec $j = 1..nc$ et p désignant le bord (Nord, Sud, Ouest ou Est).

Le résultat X sera alors un vecteur de taille N comportant les valeurs du potentiel aux différents points du maillage de gauche à droite et de haut en bas.

5.5 Exercice

On souhaite modéliser la propagation de la chaleur dans une patinoire. On se place en régime stationnaire. Seul le phénomène de conduction thermique est pris en compte. La patinoire fait 30m de largeur, 60 m de longueur et se trouve dans un bâtiment de 10m de hauteur.

On cherche à déterminer la température dans le bâtiment.

Pour simplifier le problème, on prend un problème bidimensionnel et on se place dans le plan longitudinal de la patinoire.

Conditions aux limites : la patinoire est maintenue à une température constante de -10°C , le sol et les murs sont au contact de l'air extérieur de 20°C de température.

Trouver la valeur de la température tous les 5 mètres le long de la patinoire et tous les mètres en hauteur. Donner la valeur de la température à 2 m de haut au centre de la patinoire.

5.6 Lien utile

http://femto-physique.fr/analyse_numerique/numerique_C2.php

6 Questions de cours

- 1) Donner les expressions en coordonnées cartésiennes des opérateurs : gradient, divergence, rotationnel et laplacien.
- 2) Démontrer le principe de conservation de la charge en unidimensionnel et l'énoncer en 3D.
- 3) Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide (nom et formulation).
- 4) Etablir les lois intégrales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
- 5) Etablir le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.
- 6) Ecrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
- 7) Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Quelle est son origine physique ?
- 8) Définir l'approximation des régimes quasi stationnaires. On comparera une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique. Comment se simplifie les équations de Maxwell dans un conducteur ?
- 9) Comment se simplifie les équations de Maxwell dans le cadre d'un régime permanent ?
- 10) Etablir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.

7 Questions à choix multiples

8 Exercices d'applications directes du cours

8.1 Calcul d'une densité de charge

Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant au champ électrique suivant :

8.2 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ \vec{E} à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} E_r = E_0 \frac{r}{r_0} & \text{si } r \leq r_0 \\ E_r = E_0 \frac{r_0}{r} & \text{si } r > r_0 \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer les lignes de champ. Comment varie \vec{E} le long d'une ligne de champ ?
- 2) Calculer $\text{div}\vec{E}$ en tout point. Pour un champ radial en coordonnées cylindriques, quelle loi de dépendance avec r permet d'assurer une divergence nulle ?

En coordonnées cylindriques : $\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r a_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$

- 3) Exprimer, par deux méthodes différentes le flux $\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$, où S est un cylindre d'axe Oz , de hauteur h et de rayon r .

- 4) Si \vec{E} est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?
- 5) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

En coordonnées cylindriques : $\text{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

8.3 Champ magnétostatique tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel \vec{W} défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} W_r = 0 \\ W_\theta = W_0 \frac{r}{r_0} & \text{si } r \leq r_0 \\ W_\theta = W_0 \frac{r_0}{r} & \text{si } r > r_0 \\ W_z = 0 \end{cases}$$

- 1) Justifier l'appellation de champ de tourbillon.
- 2) Exprimer la circulation de \vec{W} sur le cercle de centre O d'axe Oz et de rayon r .
- 3) Calculer en tout point $\text{rot}(\vec{W})$, puis vérifier le résultat du 2) par application du théorème de Stokes.
- 4) Calculer la divergence du champ en tout point.
- 5) Si le champ étudié ici est un champ magnétostatique : quelle est la distribution de courant correspondante ?

8.4 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x$

En déduire l'expression du champ magnétique. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.

8.5 Courants électriques et courants de déplacement

On se place dans un milieu ohmique de conductivité γ ($\vec{j} = \gamma \vec{E}$), en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν .

- 1) Montrer que $|\vec{j}| > |\vec{j}_D|$ pour peu que $\nu < \nu_{max}$. Exprimer ν_{max} en fonction de ϵ_0 et γ .
- 2) Application numérique :

- dans le cas du cuivre ($\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$);
- dans le cas de l'eau ($\gamma = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$).

8.6 Piège électrostatique

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{a^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

V_0 est une grandeur positive, a désigne une longueur caractéristique du problème.

1) Vérifier l'équation de Poisson.

2) Sur l'axe Ox , quelle est la loi de variation du potentiel avec l'abscisse ? Que représente la quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$?

Commenter son signe et comparer à celui obtenu pour $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

3) Déterminer le champ électrique à l'origine du repère. Si l'on place une particule de charge q_0 en ce point, est-elle en équilibre stable ?

9 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 20/01/2020)

9.1 CCP PC 2017

Ce problème s'intéresse à la résolution numérique de quelques problèmes d'électrostatique. Il se compose de deux parties.

- I. Étude de l'équation de Poisson et de différentes méthodes de résolution numérique.
- II. Deux études de cas : fil infini chargé et mouvement d'un électron entre les plaques d'un condensateur.

Les différentes parties sont largement indépendantes.

Un aide-mémoire `numpy/matplotlib/pyplot` est présent à la fin du sujet.

Partie I - Équation de Poisson

I.1 - Établissement de l'équation

- Q1.** Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss ainsi que la relation entre le champ \vec{E} et le potentiel électrostatique V . En déduire l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 .$$

Préciser les noms et les unités usuelles de ρ et ϵ_0 .

- Q2.** Citer plusieurs situations physiques en dehors de l'électrostatique pour lesquelles il existe une équation analogue.

I.2 - Équation adimensionnée pour un problème plan

On veut résoudre l'équation de Poisson dans une portion de plan \mathcal{P} carrée de côté L . On pose :

$$X = x/L, Y = y/L .$$

- Q3.** Montrer qu'on peut écrire l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V(X, Y)}{\partial Y^2} + \rho'(X, Y) = 0$$

où $\rho'(X, Y)$ sera exprimé en fonction de ρ , L et ϵ_0 .

I.3 - Discrétisation

Afin de résoudre numériquement l'équation de Poisson, on va utiliser un maillage de \mathcal{P} , de pas $h = 1/N$, et on va transformer les dérivées partielles par des différences entre les valeurs de V aux différents points du maillage (on parle aussi des *nœuds* du maillage). La **figure 1** (page suivante) représente le maillage de \mathcal{P} pour $N = 5$.

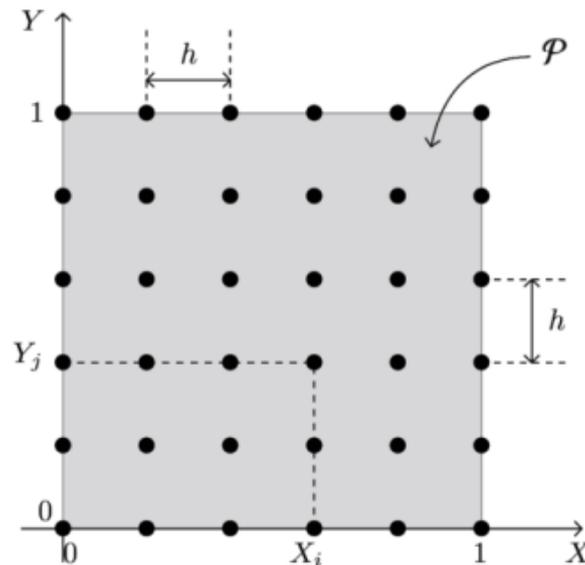


Figure 1 – Maillage de \mathcal{P} pour $N = 5$

- Q4.** En faisant un développement limité à l'ordre 2 autour du point de coordonnées (X_i, Y_j) , montrer qu'on peut exprimer la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}$ en ce point sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \frac{V(X_i + h, Y_j) + V(X_i - h, Y_j) + V(X_i, Y_j + h) + V(X_i, Y_j - h) - 4V(X_i, Y_j)}{h^2} + O(h).$$

- Q5.** Comme $X_i = ih$ et $Y_j = jh$, on note désormais $V(i, j)$ le potentiel $V(X_i, Y_j)$ en un point (X_i, Y_j) du maillage. Montrer alors qu'on peut écrire l'équation de Poisson sous la forme suivante :

$$V(i + 1, j) + V(i - 1, j) + V(i, j + 1) + V(i, j - 1) - 4V(i, j) + \rho''(i, j) = 0 \quad (1)$$

$\rho''(i, j)$ étant une fonction à définir en fonction de ρ, L, ε_0 et h .

I.4 - Résolution

La fonction $\rho''(i, j)$ étant connue, on montre en mathématiques que la solution de l'équation de Poisson est unique si on fixe les conditions aux limites sur la frontière \mathcal{F} du domaine \mathcal{P} . Ces conditions sont essentiellement de deux types :

- on impose le potentiel en tout point de \mathcal{F} (conditions de Dirichlet),
- on impose une condition sur les dérivées partielles de V en tout point de \mathcal{F} (conditions de Neumann).

Dans ce problème, on ne va considérer que des conditions de Dirichlet.

La frontière \mathcal{F} contient naturellement les points du bord de \mathcal{P} (donc appartenant aux quatre côtés du carré), mais elle peut aussi contenir certains points à l'intérieur de \mathcal{P} où le potentiel est fixé en raison de la présence d'électrodes.

L'ensemble des points de coordonnées (i, j) est donc composé de deux sous-ensembles :

- ceux dont le potentiel est connu, appartenant à la frontière \mathcal{F} ,
- ceux dont le potentiel est inconnu, appartenant à \mathcal{P} mais pas à \mathcal{F} (donc dans $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$).

Méthode de Jacobi

À partir de l'équation (1), on peut exprimer :

$$V(i, j) = \frac{1}{4}(V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) + \rho''(i, j)). \quad (2)$$

La résolution s'effectue alors en deux étapes.

— Initialisation

- a) On fixe le potentiel des points de \mathcal{F} à la valeur imposée physiquement (bords et électrodes).
- b) On donne aux points de potentiel inconnu, donc appartenant à $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$, une valeur arbitraire $V_0(i, j)$, en général nulle.

— Itérations

On calcule une nouvelle valeur $V_1(i, j)$ des potentiels en appliquant l'équation (2) pour tous les points de $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$, tandis que $V_1(i, j) = V_0(i, j)$ pour les points de \mathcal{F} .

Le processus est répété jusqu'à obtenir des valeurs du potentiel quasiment stables. En notant k le nombre d'itérations, on a donc pour le point de coordonnées (i, j) n'appartenant pas à la frontière :

$$V_{k+1}(i, j) = \frac{1}{4}(V_k(i+1, j) + V_k(i-1, j) + V_k(i, j+1) + V_k(i, j-1) + \rho''(i, j)). \quad (3)$$

La convergence de la méthode est vérifiée à l'aide du critère de convergence e_k , défini par :

$$e_k = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} (V_{k+1}(i, j) - V_k(i, j))^2}. \quad (4)$$

Le calcul sera stoppé au bout de k itérations, quand e_k deviendra inférieur à un seuil de convergence ε fixé arbitrairement.

Implémentation informatique

On va utiliser la bibliothèque `numpy` permettant une utilisation simple des tableaux de flottants à deux dimensions ; un aide-mémoire est disponible en fin de sujet.

Le chargement des bibliothèques classiques est assuré par les lignes suivantes :

```
# importation des bibliothèques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

On supposera que les tableaux `numpy` suivants, utilisés comme arguments dans les fonctions à définir dans les questions qui suivent, ont pour signification :

- `V[i, j]`, $(i, j) \in \llbracket 0 \dots N \rrbracket^2$: tableau courant du potentiel en un point de \mathcal{P} ,
- `rhos[i, j]`, $(i, j) \in \llbracket 0 \dots N \rrbracket^2$: tableau contenant la densité de charge ρ'' en un point de \mathcal{P} ,
- `frontiere[i, j]`, $(i, j) \in \llbracket 0 \dots N \rrbracket^2$: tableau de booléens indiquant si le point de coordonnées (i, j) appartient ou non à \mathcal{F} . En particulier, tous les points du bord du domaine seront tels que `frontiere[i, j]==True`.

- Q6.** Écrire la fonction `nouveau_potentiel(V, rhos, frontiere, i, j)` retournant la nouvelle valeur du potentiel au point $(i, j) \in \llbracket 0 \dots N \rrbracket^2$ selon l'équation (3).
- Q7.** Montrer que pour modifier toutes les valeurs contenues dans `V[i, j]` pendant une itération, il est nécessaire de disposer d'une copie de ce tableau.

On rappelle que l'attribut `shape` permet de récupérer les dimensions d'un tableau `numpy`.

- Q8.** Écrire la fonction `itere_J(V, rhos, frontiere)` modifiant la totalité du tableau `V[i, j]` lors d'une seule itération et retournant l'erreur calculée conformément à l'équation (4).
- Q9.** Écrire la fonction `poisson(f_iter, V, rhos, frontiere, eps)` ayant pour premier argument une fonction du même type que celle définie à la question précédente, pour dernier argument `eps` le seuil arbitraire de convergence ε et dont le rôle est de modifier le tableau des potentiels `V[i, j]` jusqu'à convergence.

Aide-mémoire numpy/matplotlib/pyplot

Importation des bibliothèques

Les bibliothèques sont importées de la façon suivante :

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Manipulation des tableaux numpy

La création d'un tableau numpy à deux dimensions dont toutes les valeurs sont initialisées à 0 est faite par l'instruction `np.zeros(format)`, `format` étant un doublet de la forme `(n_lignes , n_colonnes)` :

```
>> t0=np.zeros((2,3)); print(t0)
[[ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]
```

Pour avoir un tableau rempli de 1, on utilise `np.ones(format)` :

```
>> t1=np.ones((2,2)); print(t1)
[[ 1.  1.]
 [ 1.  1.]
```

On peut récupérer le format d'un tableau en demandant son attribut `shape`, ce qui retourne un doublet :

```
>> print(t0.shape); print(t1.shape)
(2, 3)
(2, 2)
```

Dans le cas d'un tableau carré, on peut donc récupérer le nombre de lignes, égal au nombre de colonnes, en accédant au premier élément du doublet :

```
>> t1.shape[0]
2
```

On peut créer un tableau numpy de booléens en ajoutant le type `bool`. La valeur 0 est associée à `False`, la valeur 1 à `True` :

```
>> np.zeros((2,3), bool)
[[False False False]
 [False False False]]
>> np.ones((2,3), bool)
[[ True True True]
 [ True True True]]
```

L'accès à un élément du tableau a (en lecture ou en modification) se fait par `a[i, j]`, les lignes et les colonnes étant numérotées à partir de 0 :

```
>> a=np.zeros((2,3)) ; a[0,0]=1 ; a[1,2]=2
>> a
[[ 1.  0.  0.]
 [ 0.  0.  2.]]
```

Une copie indépendante d'un tableau a se fait à l'aide de `np.copy(a)`

```
>> b = np.copy(a) ; b[0,0]=3 ; b[1,1]=5
>> a
[[ 1.  0.  0.]
 [ 0.  0.  2.]]
>> b
[[ 3.  0.  0.]
 [ 0.  5.  2.]]
```