Energie du champ électromagnétique

Extrait du programme

Dans la partie **4**, on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. **Énergie du champ électromagnétique**	
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; densité volumique de puissance Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme globale.

Sommaire

1 Bilan d'énergie électromagnétique
- **1.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique**
- **1.2 Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge**
- **1.3 Puissance rayonnée**
- **1.4 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique**

2 Bilan énergétique dans un conducteur ohmique
- **2.1 Loi d'Ohm locale**
- **2.2 Forme intégrale de la loi d'Ohm**
- **2.3 Densité volumique de puissance cédée par effet Joule**

3 Questions de cours

4 Questions à choix multiples

5 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 27/01/2020)

6 Exercices type oral
- **6.1 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique**
- **6.2 Cas particulier du condensateur plan**
- **6.3 Cas particulier du solénoïde**

3 Questions de cours

1) Donner l'expression de la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.

2) Donner la loi d'Ohm locale. Dans quel cas peut-on l'utiliser ? Quelle relation retrouve-t-on si on l'intègre ? Comment exprimer la résistance d'un conducteur cylindrique ?

3) Sous quelle forme peut-on réécrire la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge dans un conducteur ohmique ? En l'intégrant sur le volume d'un conducteur ohmique cylindrique, quelle expression retrouve-t-on ? Comment peut-on aussi nommer cette puissance ?

4) Démontrer l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. On expliquera bien la signification de chacun des termes.

5) Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique, du vecteur de Poynting et de la puissance rayonnée.

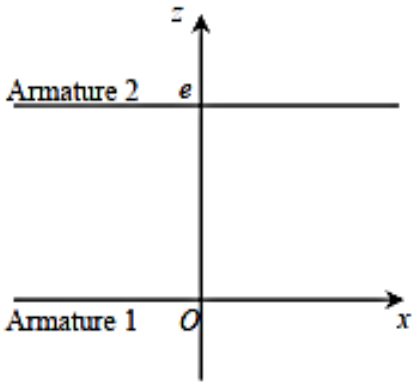
4 Questions à choix multiples

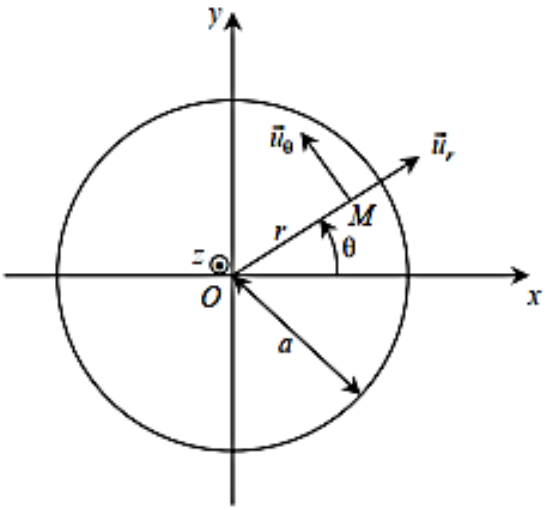
5 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 27/01/2019)

SECOND PROBLÈME

LE CONDENSATEUR

On étudie un condensateur plan. Ce condensateur est supposé idéal, c'est-à-dire qu'on néglige tout effet de bord. Les armatures ont la forme de disque d'axe Oz et de rayon a. L'armature 1 est située en $z=0$ et l'armature 2 en $z=e$. On repère un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z). On notera $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ la base correspondante. On se reportera aux figures ci-dessous. L'espace entre les armatures est défini par $0<z<e$ et $0<r<a$. Le milieu entre les armatures est assimilable au vide (permittivité ε_0 et perméabilité μ_0).





vue de dessus

5- Électrostatique

On se place en régime stationnaire. L'armature 1 porte la charge positive Q et l'armature 2 la charge négative $-Q$. Le condensateur plan étant supposé idéal, la charge surfacique est uniforme sur une armature (σ sur l'armature 1 et $-\sigma$ sur l'armature 2).

5.1 Exprimer la charge surfacique σ.

5.2 Donner l'expression du champ électrostatique entre les armatures en fonction de σ, ε_0 et $\vec{u}_z$.

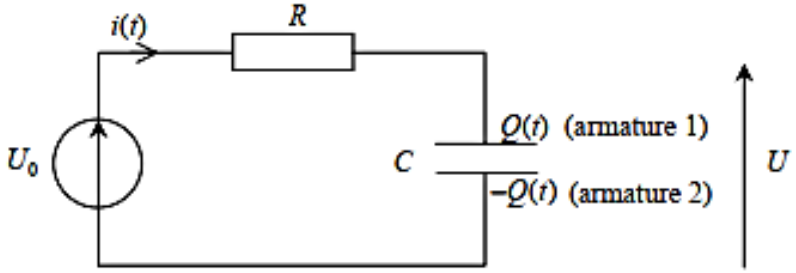
5.3 Déterminer la différence de potentiel entre les armatures $U=V_1-V_2$ où V_1 est le potentiel de l'armature 1 et V_2 le potentiel de l'armature 2.

5.4 Définir et exprimer la capacité C de ce condensateur en fonction de ε_0, e et S où S représente la surface d'une armature ($S=\pi a^2$).

5.5 Exprimer l'énergie potentielle W_p du condensateur en fonction du champ électrostatique E, de S, e et ε_0. Retrouver ainsi sur cet exemple l'expression de la densité volumique d'énergie électrique u_e.

6- Charge du condensateur

Le condensateur précédent étant initialement déchargé $(Q(t=0)=0)$, on le charge à l'aide du générateur idéal de tension de f.é.m. constante U_0. On note R la résistance du circuit. On se reportera au schéma ci-dessous pour les orientations.



A- Champ électrique

6.1 Déterminer la loi d'évolution de la charge Q en fonction du temps t. On fera intervenir dans cette expression la capacité C du condensateur, U_0 et la constante $\tau = RC$.

6.2 Tracer l'allure du graphe de Q en fonction de t. À quoi est homogène la constante τ ?

6.3 Déterminer, en fonction de C et U_0, pendant la durée de la charge (c'est-à-dire entre $t=0$ et t infini) :

- l'énergie W_1 fournie par le générateur ;
- l'énergie W_2 emmagasinée par le condensateur ;
- l'énergie W_3 dissipée par effet Joule.

6.4 On suppose que la charge Q varie suffisamment lentement pour que l'expression du champ électrique soit la même que celle obtenue en électrostatique à la question 5.2. Le champ électrique $\vec{E}(t)$ s'exprime donc en fonction de la charge surfacique instantanée $\sigma(t)$ au même instant t selon la même relation qu'en régime stationnaire. Écrire, en fonction de t, ε_0, U_0, e et τ, la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ et le champ électrique $\vec{E}(t)$.

B- Courant de déplacement

6.5 On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. On appelle densité de courant de déplacement : $\vec{j}_D = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. On rappelle aussi l'égalité : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

Écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas particulier de l'espace entre les armatures du condensateur. Exprimer la densité de courant de déplacement $\vec{j}_D$ en fonction de t, U_0, e, τ et ε_0.

6.6 Écrire la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère. Montrer qu'elle correspond à un théorème d'Ampère généralisé à condition d'inclure dans l'intensité enlacée le flux du courant de déplacement.

C- Magnétostatique

6.7 Pour déterminer le champ magnétique entre les armatures du condensateur, on étudie d'abord le dispositif suivant : un conducteur cylindrique infini, d'axe Oz (vecteur unitaire $\vec{u}_z$) et de rayon a, est parcouru par un courant stationnaire de densité uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_z$. En étudiant les symétries du problème montrer que le champ magnétique $\vec{B}$

créé par cette distribution de courant est orthoradial et ne dépend que de r, c'est-à-dire que $\vec{B}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta .$$

6.8 En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en fonction de μ_0, j et r pour $r < a$.

D- Champ magnétique

6.9 On revient au condensateur. À partir de la question 6.6, et en s'inspirant de la question 6.8, montrer que le champ magnétique entre les armatures s'écrit pour $r < a$:

$$\vec{B} = \frac{U_0 r}{2\tau e c^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta .$$

E- Puissance rayonnée

6.10 Rappeler la définition du vecteur de Poynting.

6.11 Montrer que le vecteur de Poynting en $r = a$ (à la limite de l'espace entre les armatures) peut s'écrire :

$$\vec{\Pi}(r=a,t) = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2e^2\tau}\left(e^{-\frac{2t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\vec{u}_r .$$

6.12 En déduire la puissance rayonnée *sortant* de l'espace entre les armatures.

6.13 Déterminer alors l'énergie électromagnétique qui est *entrée* dans l'espace compris entre les armatures pendant la charge du condensateur (c'est-à-dire entre $t = 0$ et t infini). Comparer avec l'énergie emmagasinée par le condensateur obtenue à la question 6.3.

7- Condensateur en régime sinusoïdal permanent

Le condensateur précédent est relié à un générateur idéal de tension délivrant une f.é.m. sinusoïdale. La charge $Q(t)$ portée par l'armature 1 varie donc sinusoïdalement selon la loi $Q = Q_0 \cos(\omega t)$. L'armature 2 porte une charge opposée. La charge se répartit encore uniformément sur les armatures. On suppose que les variations temporelles sont suffisamment lentes pour que le champ électrique entre les armatures conserve la même expression qu'en régime stationnaire.

7.1 Exprimer le champ électrique entre les armatures en fonction de Q_0, ω, ε_0, a et t.

7.2 Déterminer le champ magnétique entre les armatures (par la même méthode qu'à la question 6.9). On exprimera $\vec{B}$ en fonction de Q_0, ω, μ_0, a, r et t.

7.3 Rappeler la définition de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}, de la densité volumique d'énergie magnétique u_m et de la densité volumique d'énergie électrique u_e.

7.4 Montrer que le rapport de la densité volumique moyenne d'énergie magnétique sur la densité volumique moyenne d'énergie électrique s'écrit :

$$\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} .$$

7.5 En déduire que si a/c est très petit devant la période $T = 2\pi/\omega$, la densité moyenne d'énergie électromagnétique se confond avec la densité moyenne d'énergie électrique. Si $a = 3$ cm, dans quel domaine de fréquence la condition précédente est-elle vérifiée (on rappelle que $c = 3.10^8$ m.s^{-1}) ? Cette condition est-elle vérifiée dans les montages usuels ? Que représente physiquement la durée a/c ?

6 Exercices type oral

6.1 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I uniformément répartie et de conductivité γ uniforme. Il est de section S , de rayon a, de longueur L et dirigé selon Oz.

1) Donner la loi d'Ohm locale.

2) En déduire la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.

3) Donner l'expression du champ magnétique crée par le cylindre pour $r > a$. On supposera le cylindre infini.

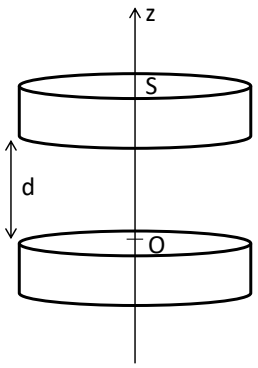
4) Donner l'expression du vecteur de Poynting.

5) En déduire la valeur de la puissance entrant par rayonnement dans le dipôle. Conclure.

6.2 Cas particulier du condensateur plan

6.2.1 Bilan d'énergie en régime stationnaire

On considère un condensateur plan dont les armatures de charges opposées $(Q, -Q)$ ont une surface S, un rayon R et sont distantes de d. Le champ électrostatique créé entre ses deux armatures est uniforme de norme E_0. La tension à ses bornes est notée U.



1) Déterminer l'expression du champ électrostatique entre ses armatures (que l'on pourra supposées infinies dans cette question). On donnera alors l'expression de E_0 en fonction de Q, S et ε_0.

2) Déterminer alors l'expression de la tension U entre ses bornes en fonction de E_0 et d.

3) Exprimer la capacité C d'un condensateur plan en fonction de ses dimensions S, d et ε_0.

4) En déduire l'expression de l'énergie U_E stockée dans le condensateur en fonction de E_0 et de ses dimensions.

5) Comparer à la densité volumique d'énergie électrique, u_E.

6.2.2 Bilan d'énergie dans le cadre de l'ARQS

On effectue le bilan énergétique d'un condensateur lors de sa charge très lente (ARQS).

Dans le cadre de l'ARQS : $R\omega \ll c$. On pose aussi : $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

On note $q(t) = q_0\, cos(\omega t)$ la charge de l'armature du condensateur située en $z = d$.

6) Réécrire l'expression du champ électrique entre les 2 armatures en fonction de S, $q(t)$ et ε_0. La variation du champ électrique est à l'origine de l'existence d'un courant de déplacement. Quelle est son expression ?

7) Quelle est la valeur de la densité de courant volumique $\vec{j}$ entre les deux armatures ? Quelle est l'expression du champ magnétique entre les deux armatures de surface S ? (Utiliser le théorème d'Ampère généralisé). Donner alors sa valeur pour $r = R$.

8) Comparer les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de la densité volumique d'énergie. Donner alors l'expression de l'énergie électromagnétique, U, stockée dans le condensateur. Où est-elle localisée ? Donner aussi l'expression de la dérivée de U par rapport au temps.

9) Quelle est l'expression du vecteur de Poynting ? Exprimer alors la puissance rayonnée à travers la surface latérale du condensateur.

10) Faire un bilan d'énergie. Conclure.

6.3 Cas particulier du solénoïde

6.3.1 Bilan d'énergie en régime stationnaire

On considère un solénoïde de longueur l contenant N spires de section S de rayon a parcouru par un courant i.

1) Déterminer l'expression du champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde (que l'on considèrera infini dans cette question) en le supposant nul à l'extérieur. On notera B_0 sa norme que l'on exprimera en fonction de μ_0, N, l et i.

2) Déterminer le flux propre ϕ_{propre} du solénoïde.

3) Retrouver l'expression de l'inductance L du solénoïde en fonction de ses dimensions S et l et de N et μ_0.

4) En déduire l'expression de l'énergie U_M emmagasinée dans la bobine en fonction de B_0 et de ses dimensions.

5) Comparer à la densité volumique d'énergie magnétique, u_M.

6.3.2 Bilan d'énergie dans le cadre de l'ARQS

Le solénoïde est maintenant parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0\, cos(\omega t)$. On suppose le courant variant suffisamment lentement pour se placer dans l'ARQS et que les lois de la magnétostatique soient applicables.

Dans ce cadre : $a\omega \ll c$. On pose aussi : $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

1) Rappeler l'expression du champ magnétique qui existe à l'intérieur du solénoïde en fonction de $i(t)$.

2) En déduire l'expression du champ électrique en tout point M à l'intérieur du solénoïde. Donner en particulier la valeur du champ électrique pour $r = a$.

3) Comparer les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de la densité volumique d'énergie. Donner alors l'expression de l'énergie électromagnétique, U, stockée dans une portion de longueur d du solénoïde. Où est-elle localisée ? Donner aussi l'expression de la dérivée de U.

4) Calculer l'expression du vecteur de Poynting, puis sa puissance rayonnée à travers la paroi du solénoïde (cylindre d'axe (Oz) de rayon a et de hauteur d).

5) Interpréter les résultats précédents.

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$