

Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

Extrait du programme

La partie 4 introduit le point de vue eulérien pour l'étude des écoulements. Il s'agit de décrire simplement un écoulement en identifiant des tubes de courant sur lesquels des bilans pourront ensuite être effectués. On pourra faire le lien avec la signification physique des opérateurs rotationnel et divergence introduits dans le cours d'électromagnétisme.

| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|---|---|
| 4. Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite. | |
| Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire. | Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes. |
| Lignes et tubes de courant. | Déduire le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement à l'aide d'une carte de champ de vitesse fournie. |
| Débit massique. | Exprimer le débit massique en fonction de la vitesse d'écoulement. Exploiter la conservation du débit massique. |
| Débit volumique. | Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide incompressible en écoulement. |
| Fluides parfaits. Fluides newtoniens : notion de viscosité. | Caractériser un fluide parfait par un profil de vitesse uniforme dans une même section droite. Citer des ordres de grandeur de viscosité de gaz et de liquides (dans le cadre des machines hydrauliques et thermiques, des lubrifiants, ...). Relier l'expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse. Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite. Lier qualitativement l'irréversibilité d'un écoulement à la viscosité. |

Sommaire

- 1 Description eulérienne d'un fluide**
- 2 Visualisation d'un écoulement**
 - 2.1 Ligne de courant et tube de courant**
 - 2.2 Exemples d'écoulements**
- 3 Débits massiques et volumiques**
 - 3.1 Débit massique**
 - 3.2 Conservation du débit massique**
 - 3.3 Débit volumique**
- 4 Fluides parfaits, fluides newtoniens**
 - 4.1 Fluide parfait**
 - 4.2 Fluide newtonien et viscosité**
 - 4.3 Viscosité et irréversibilité**
- 5 Questions de cours**
- 6 Questions à choix multiples**
- 7 Exercices Terminale STI2D**
 - 7.1 Remplissage d'une baignoire**
 - 7.2 Distribution d'eau d'arrosage**
 - 7.3 Débit cardiaque**
 - 7.4 Lance à incendie**
- 8 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 07/10/2019)**
- 9 Exercices type oral**
 - 9.1 Conservation du débit**
 - 9.2 Ecoulement sanguin**
 - 9.3 Modélisation d'un tourbillon de vidange**
 - 9.4 Ecoulement de Couette plan**
 - 9.5 Modélisation d'une lubrification**

1 Description eulérienne d'un fluide

Etude du fluide à l'échelle

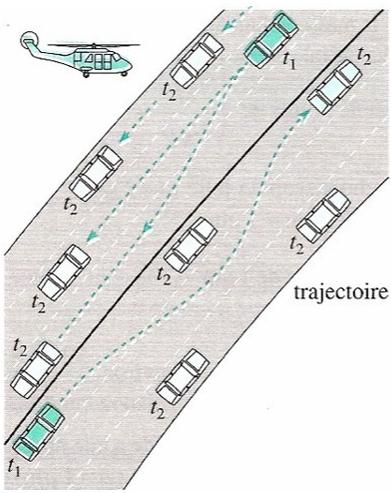
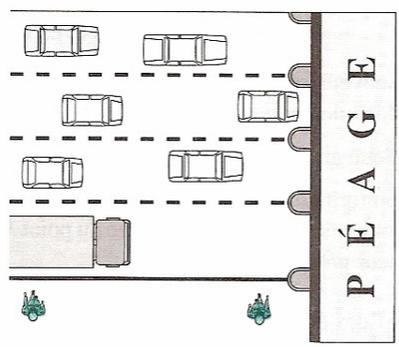
Système : particule de fluide désignée par le point M , de volume dV et de masse δm , en un instant t .

Description du fluide à l'aide de 2 grandeurs intensives :

-
-

Description Eulérienne :

Exemple :

| Description Lagrangienne | ≠ | Description Eulérienne |
|--|---|---|
|  | |  |
| <p>On observe les trajectoires des divers véhicules (entre $t = t_1$ et $t = t_2$)</p> | | <p>Les deux gendarmes observant les vitesses des véhicules se sont placés en formalisme eulérien pour décrire l'écoulement du trafic. A la même date t, ils n'observent pas les mêmes véhicules.</p> |

Hypothèse du cours : Ecoulement **stationnaire**

La pression, la masse volumique ou encore la vitesse ne dépendront plus du temps et s'écriront respectivement :

$$P(M), \mu(M), \vec{v}(M)$$

Liens :

<https://www.youtube.com/watch?v=mdN800kx2ko#t=311>

<https://www.youtube.com/watch?v=zUaD-GMARrA>

<https://www.youtube.com/watch?v=iltS2O8Fcf8>

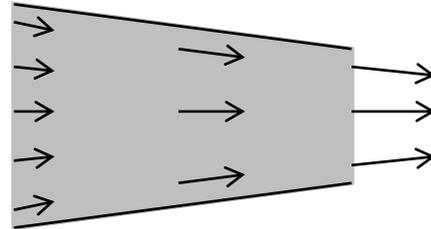
2 Visualisation d'un écoulement

2.1 Lignes et tubes de courant

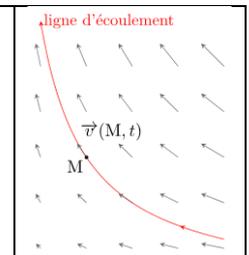
Carte de champ : représentation graphique plane où on va représenter le vecteur vitesse en un certain nombre de points. La direction indiquée par une flèche sur la carte sera celle de la vitesse en ce point et la longueur de la flèche sera proportionnelle à la norme de la vitesse.

Exemple :

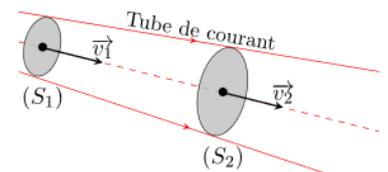
Carte de champ pour une conduite dont la section diminue



Définition : Ligne de courant



Définition : Tube de courant



2.2 Exemples d'écoulements

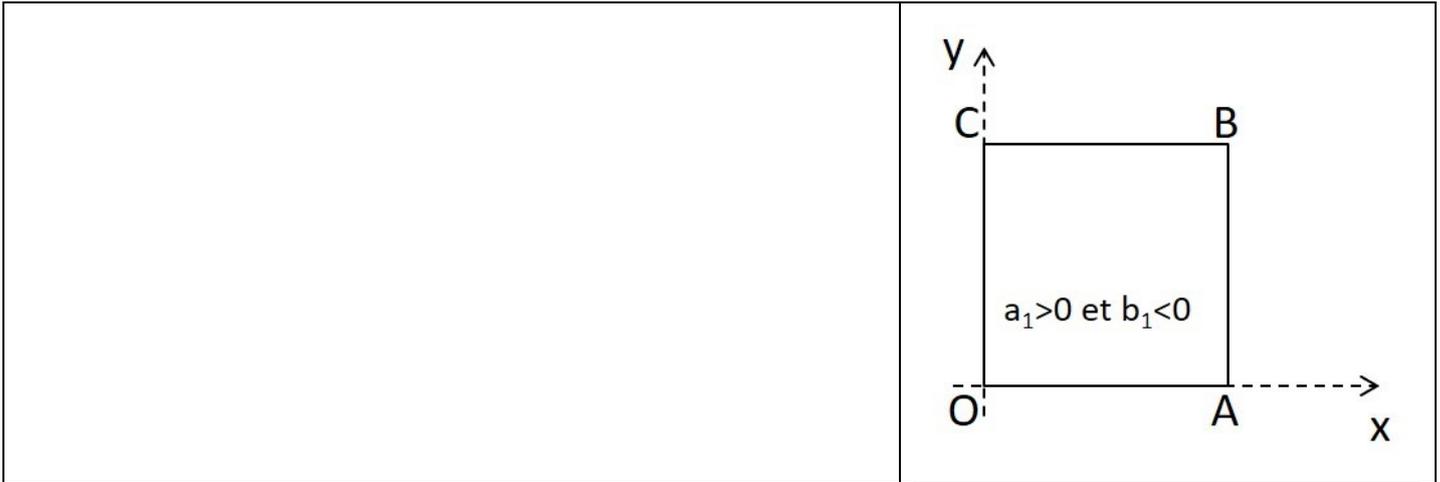
Écoulement **uniforme** :

Écoulement **divergent** :

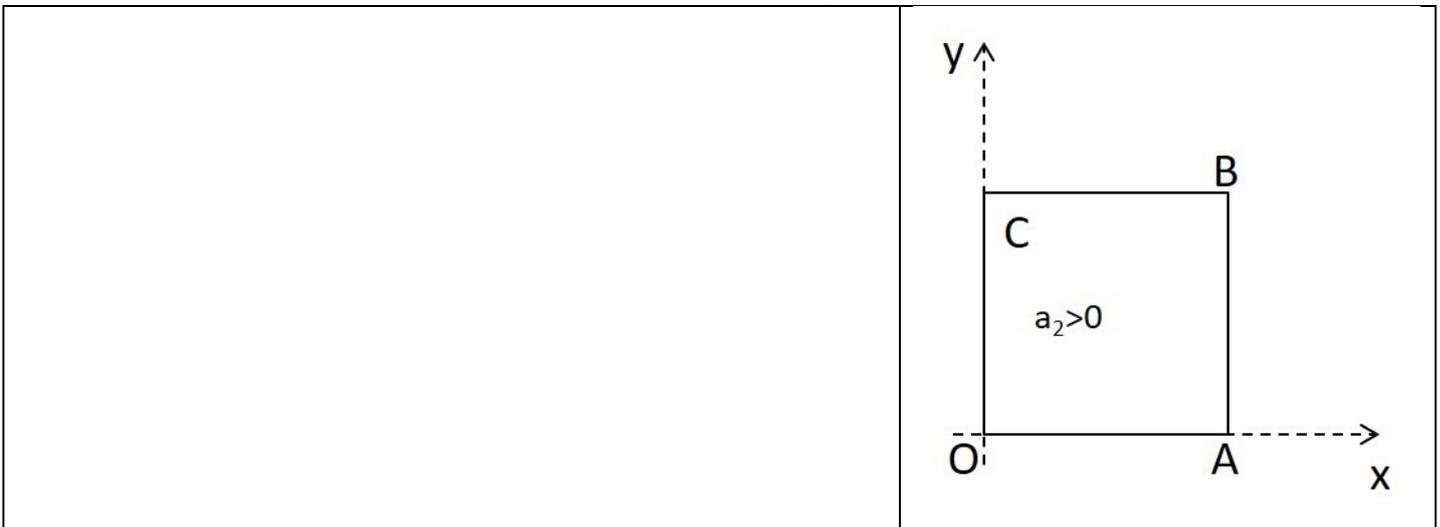
Écoulement **rotationnel** :

Exemples : Particule de fluide cubique de côté L

1) Ecoulement divergent et non rotationnel : $\vec{v}_1 = a_1 x \vec{u}_x + b_1 y \vec{u}_y$



2) Ecoulement non divergent et rotationnel : $\vec{v}_2 = -a_2 y \vec{u}_x + a_2 x \vec{u}_y$



Liens :

http://www.femto-physique.fr/simulations/mecaflu_simu1.php

http://www.femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/mecaflu_C1.php

<https://youtu.be/rB83DpBJQsE?t=207>

5 Questions de cours

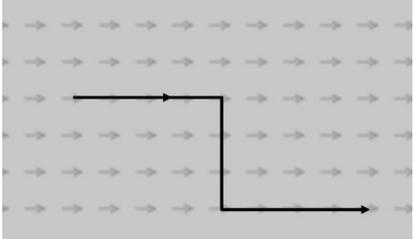
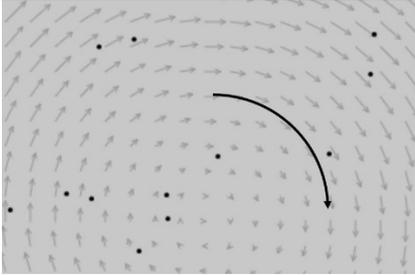
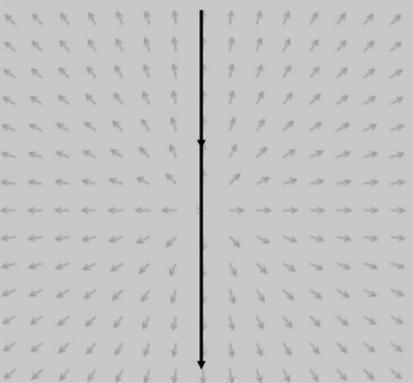
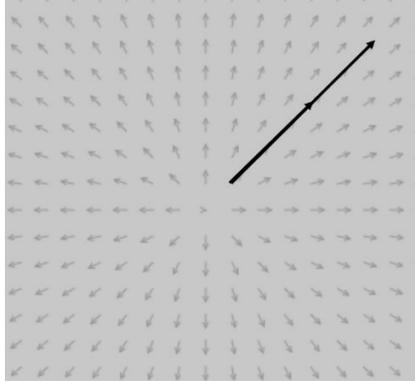
- 1) Expliquer ce que représente la description eulérienne d'un fluide.
- 2) Définir la notion de ligne de courant et de tube de courant.
- 3) Qu'appelle-t-on écoulement uniforme, divergent, rotationnel ? Donner des exemples.
- 4) Définir les débits massiques et volumiques. Donner leurs expressions en fonction de la vitesse d'écoulement du fluide pour un écoulement unidimensionnel ou un écoulement quelconque. Comment peut-on relier ces deux débits ?
- 5) Démontrer qu'il y a conservation du débit massique en régime stationnaire. Que se passe-t-il si le fluide est de plus incompressible ?
- 6) Qu'est-ce qu'un fluide parfait ? un fluide Newtonien ?
- 7) Donner la définition de la force de cisaillement intervenant dans un fluide visqueux. On n'oubliera pas de préciser les conventions choisies. Donner les unités des termes entrant dans l'équation.
- 8) Que vaut la viscosité dans un fluide parfait ? D'un point de vue thermodynamique, à quoi peut-on associer la viscosité ?

6 Questions à choix multiples

1) Quel(s) cas de figure correspond(ent) à une description eulérienne ?

| | | | |
|---|--|---|--|
| A | Un bateau remonte une rivière. Un passager à son bord suit sa trajectoire au cours du temps. | C | On suit le mouvement d'une particule de fluide à l'aide d'un marqueur coloré en fonction du temps. |
| B | Un bateau remonte une rivière. Depuis leur maison, les riverains notent sa vitesse quand il passe devant chez eux. | D | Des anémomètres sont placés en différents points d'un écoulement. Chacun d'entre eux donne à un instant donné la vitesse du fluide là où il se trouve. |

2) Sur les figures suivantes, quelle(s) est(sont) celle(s) où les lignes de courant tracées sont justes ?

| | | | |
|---|--|---|---|
| A |  | C |  |
| B |  | D |  |

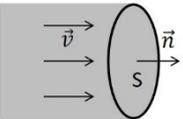
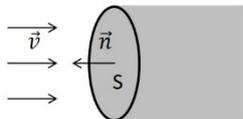
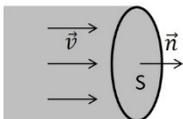
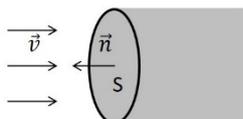
3) Dans un fluide, la vitesse d'écoulement peut se mettre sous la forme suivante : $\vec{v} = -ay\vec{u}_z + az\vec{u}_y$. Quelle(s) affirmation(s) suivante(s) est(sont) juste(s) ?

| | | | |
|---|-------------------------------|---|--------------------------------|
| A | L'écoulement est divergent. | C | L'écoulement est uniforme. |
| B | L'écoulement est rotationnel. | D | L'écoulement est stationnaire. |

4) Pour le même écoulement qu'à la question 3. Quelle(s) valeur(s) du rotationnel est(sont) juste(s) ?

| | | | |
|---|--|---|---------------------------------------|
| A | $\text{rot}(\vec{v}_2) = -2a\vec{u}_x$ | C | $\text{rot}(\vec{v}_2) = \vec{0}$ |
| B | $\text{rot}(\vec{v}_2) = 2a\vec{u}_x$ | D | $\text{rot}(\vec{v}_2) = 2a\vec{u}_z$ |

5) Quelle(s) figure(s) est(sont) juste(s) ?

| | | | |
|---|--|---|---|
| A |  $D_m > 0$ | C |  $D_m > 0$ |
| B |  $D_m < 0$ | D |  $D_m < 0$ |

Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

6) Pour un écoulement homogène et uniforme sur une section d'une conduite, quelle(s) est(sont) les expression(s) juste(s) des débits massiques et volumiques en fonction de μ , la masse volumique du fluide, S , la section de la conduite et v , la vitesse du fluide.

| | | | | | | | |
|---|-----------------|---|-----------------|---|-------------|---|-------------|
| A | $D_m = \mu S v$ | B | $D_V = \mu S v$ | C | $D_m = S v$ | D | $D_V = S v$ |
|---|-----------------|---|-----------------|---|-------------|---|-------------|

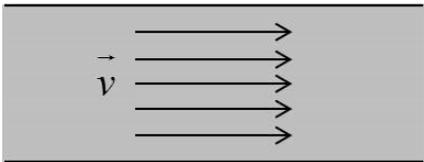
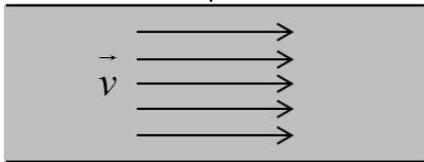
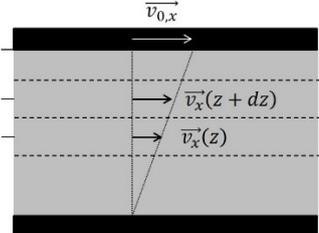
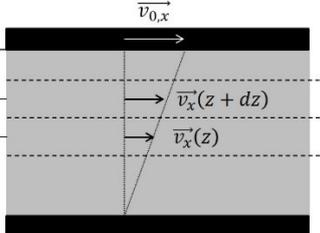
7) Pour un écoulement homogène et uniforme sur une section d'une conduite, quelle(s) est(sont) les expression(s) juste(s) des débits massiques et volumiques en fonction de μ , la masse volumique du fluide, D , le diamètre de la conduite et v , la vitesse du fluide.

| | | | |
|---|-----------------------------|---|---------------------------------|
| A | $D_V = \pi D^2 v$ | C | $D_m = \mu \pi \frac{D^2}{4} v$ |
| B | $D_V = \pi \frac{D^2}{2} v$ | D | $D_m = \pi \frac{D^2}{4} v$ |

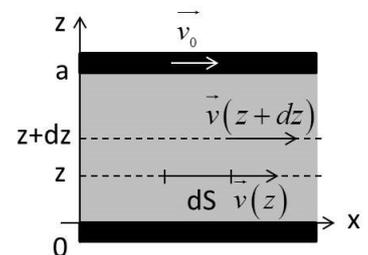
8) Quelle(s) affirmation(s) est(sont) juste(s) ?

| | | | |
|---|--|---|--|
| A | Pour un fluide en écoulement stationnaire, il y a conservation du débit massique sur un tube de courant | C | Pour un fluide en écoulement stationnaire, il y a conservation du débit volumique sur un tube de courant |
| B | Pour un fluide incompressible et homogène en écoulement stationnaire, il y a conservation du débit volumique sur un tube de courant. | D | Pour un fluide en écoulement stationnaire : $div(\vec{v}) = 0$ |

9) Quel(s) schéma(s) est(sont) juste(s) ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | <p>Fluide Newtonien :</p>  | C | <p>Fluide parfait :</p>  |
| B | <p>Fluide Newtonien :</p>  | D | <p>Fluide parfait :</p>  |

10) Quelle(s) expression(s) de la force de cisaillement est(sont) juste(s) ? On se réfèrera au schéma suivant :



| | | | |
|---|---|---|---|
| A | Force exercée par la couche en $z+dz$ sur la couche en z : $d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dS \vec{u}_z$ | C | Force exercée par la couche en z sur la couche en $z+dz$: $d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{u}_x$ |
| B | Force exercée par la couche en $z+dz$ sur la couche en z : $d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dS \vec{u}_x$ | D | Force exercée par la couche en $z+dz$ sur la couche en z : $d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{u}_x$ |

7 Exercices Terminale STI2D

7.1 Remplissage d'une baignoire

Une baignoire peut contenir 220 litres d'eau.

- 1) Calculer le débit massique du robinet sachant que la baignoire se remplit en 15 min.
- 2) En déduire le débit volumique de ce robinet.

L'eau circule dans la maison dans des canalisations en cuivre ou en PEHD de 18 mm de diamètre avant d'être répartie en fonction des besoins des appareillages avec des diamètres inférieurs. Le tuyau qui aliment la baignoire a un diamètre de 12 mm.

- 3) Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement d'eau à la sortie du robinet.
- 4) En considérant que la réduction du diamètre du tuyau d'alimentation s'effectue en régime permanent, calculer alors la vitesse moyenne de l'écoulement dans la canalisation de 18 mm.

7.2 Distribution d'eau d'arrosage

Un robinet d'eau de jardin standard débite en moyenne 15 L d'eau chaque minute.

- 1) Déterminer la vitesse d'écoulement dans la canalisation de diamètre 19 mm.
- 2) On raccorde à la sortie du robinet trois tuyaux de 15 mm de diamètre à l'aide d'une dérivation. Que peut-on dire du débit dans les tuyaux par rapport à celui dans la canalisation ?
- 3) Calculer la vitesse d'écoulement dans les tuyaux.

7.3 Débit cardiaque

Dans les conditions de repos, le débit cardiaque à la sortie de l'aorte est égal à environ 6 L/min chez un adulte. On considère l'aorte de section $S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Le sang s'écoule, dans cette artère, à une vitesse moyenne v .

Donnée : masse volumique du sang $\mu = 1060 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

- 1) Montrer que le débit volumique est $D_V = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.
- 2) Calculer le débit massique D_m du sang.
- 3) Quelle est la vitesse moyenne de l'écoulement du sang dans l'artère.

7.4 Lance à incendie

En France, les pompiers disposent d'une lance de grande puissance de 1000 L/min avec un diamètre d'entrée de 100 mm et un diamètre de sortie de 25 mm.

- 1) Déterminer la vitesse de l'eau dans le tuyau puis sa vitesse d'expulsion.
- 2) Quel est l'intérêt d'une vitesse aussi élevée ?
- 3) Déterminer le volume puis la masse d'eau projetée en 25 min.

8 Exercices type écrit (à faire en DM pour le 07/10/2019)

8.1 Banque Agro-Véto 2018

Documents scientifiques

Document 1 : Coefficient de frottement

Un solide glisse sur un plan horizontal fixe avec une vitesse \vec{v} . Ce solide subit de la part du support plan une réaction \vec{N} normale à la surface de contact et une force de frottement \vec{T} tangente à la surface de contact, colinéaire et de sens opposé à la vitesse \vec{v} . On appelle coefficient de frottement le rapport

$$f = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}.$$

Partie 1 : Questions sur des notions du programme en lien avec le thème

1.1) Écoulement de Couette plan (cisaillement simple plan)

Un liquide newtonien, de viscosité dynamique η , incompressible et indilatable, s'écoule entre deux plans infinis parallèles distants de h et orthogonaux à l'axe Oz des coordonnées (**Figure 7**). Le plan en $z=0$ est immobile alors que le plan en $z=h$ est en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x . On suppose que le régime permanent est atteint, que la pression est uniforme et que le profil de vitesse est linéaire selon Oz . Notations : $\vec{v} = v\vec{u}_x$; champ des vitesses dans le fluide : $\vec{V} = V(z)\vec{u}_x$.

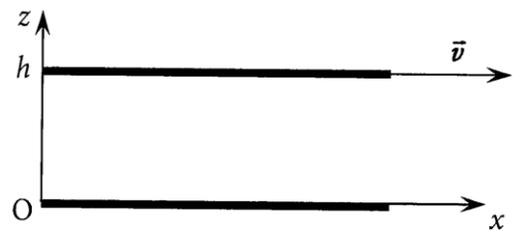


Figure 7. Cisaillement simple plan.

- Donner l'expression du champ des vitesses dans le fluide en fonction de v , h et z .
- Donner l'expression de la force tangentielle surfacique subie par le plan supérieur.
- Établir l'expression de la force de frottement subie par une section carrée de côté a du plan supérieur et l'expression de la puissance de cette force.

1.2) Glissement et frottement sur la glace

Un palet de hockey sur glace de masse m est lancé sur une surface plane de glace avec une vitesse initiale horizontale $v_0\vec{u}_x$ dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x . Pour simplifier, on suppose que son mouvement est un mouvement de translation. On note v la composante sur Ox du vecteur vitesse \vec{v} du palet. Le palet a la forme d'un disque de 2,54 cm d'épaisseur et 7,62 cm de diamètre.

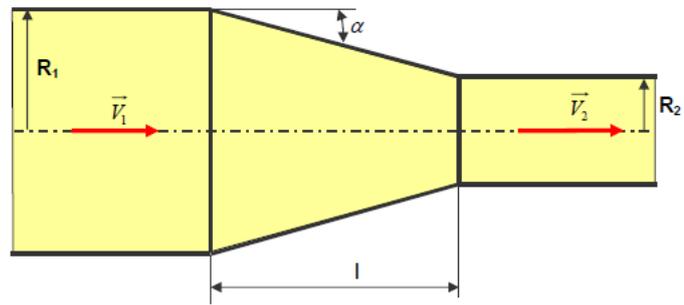
Données : $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m = 170 \text{ g}$; accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- Faire l'inventaire des forces subies par le palet en négligeant les frottements de l'air et les représenter sur un schéma.
- On suppose d'abord que la force de frottement \vec{T} est du type frottement fluide visqueux : $\vec{T} = -\alpha\vec{v}$. Établir l'expression de la vitesse du palet en fonction du temps. Tracer l'allure du graphe correspondant.
- On suppose dans cette question et les deux suivantes que le coefficient de frottement (voir **document 1**) est une constante. Exprimer la force de frottement et calculer numériquement son intensité. Donnée : $f = 0,02$.
- Établir l'expression de la vitesse du palet en fonction du temps. Tracer l'allure du graphe correspondant.
- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'expression de la distance parcourue par le palet avant de s'arrêter. Calculer numériquement cette distance.

9 Exercices type oral

9.1 Conservation du débit

On veut accélérer la circulation d'un fluide incompressible en écoulement stationnaire dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α .



1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

2) Calculer ($R_1 - R_2$) en fonction de l et α .

En déduire la longueur l .

Données : $R_1 = 50\text{mm}$ et $\alpha = 15^\circ$

9.2 Écoulement sanguin

A la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon $a_0 = 1\text{cm}$. Le débit volumique est $D_V = 6\text{L}\cdot\text{min}^{-1}$ et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. Sa masse volumique vaut $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1) Quelle est la vitesse v du sang dans l'aorte ? On supposera que le champ des vitesses est uniforme sur une section droite.

Le sang est évacué du cœur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise en N_a artères de rayon a_a , puis en N'_a artérioles de rayon $a'_a = 20\mu\text{m}$. Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{V,a} = 2 \cdot 10^{-6} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

2) Calculer le nombre N_a d'artères.

3) Faire de même avec N'_a sachant que la vitesse du sang dans une artériole est $v'_a = 5\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

9.3 Modélisation d'un tourbillon de vidange

On modélise, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), le tourbillon de vidange d'un lavabo par un cœur cylindrique de rayon a et d'axe (Oz) dans lequel la vitesse est donnée par $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$ où ω est la vitesse angulaire du fluide.

Dans la zone périphérique qui entoure le cœur, le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = \frac{C}{r}\vec{u}_\theta$, où C est constante.

En coordonnées cylindriques : $\text{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$

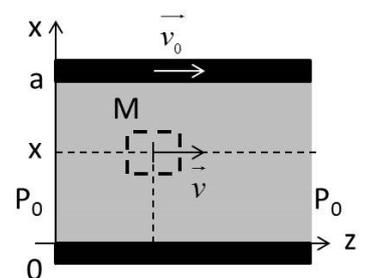
1) Tracer l'allure de v en fonction de r . En déduire l'expression de la constante C .

2) Montrer que l'écoulement n'est rotationnel que dans une région que l'on précisera.

3) On se place dans la zone périphérique du tourbillon. Donner l'allure des lignes de courants dans un plan orthogonal à (Oz). Décrire brièvement le mouvement d'un bouchon placé à la surface de l'eau dans cette zone. Le bouchon tourne-t-il sur lui-même ? Tourne-t-il autour de l'axe du tourbillon ?

9.4 Écoulement de Couette plan

Un fluide incompressible de masse volumique μ et de viscosité dynamique η est en écoulement stationnaire dans une conduite de longueur L selon (Oz), entre deux plaques l'une en $x=0$ fixe et l'autre en $x=a$ animée d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$. Le champ des vitesses s'écrit donc : $\vec{v} = v_z(x)\vec{u}_z$. La pression est supposée être la même en entrée et en sortie de la conduite égale à P_0 . Soit une particule de fluide de volume dV appartenant à cet écoulement, centrée sur le point $M(x, y, z)$ et assimilée à un point matériel.



1) Faire un bilan des forces sur la particule de fluide.

2) Donner l'expression de la vitesse de cette particule de fluide.

9.5 Modélisation d'une lubrification

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur e entre deux plaques horizontales très longues. La plaque du dessous est immobile et celle de dessus possède la vitesse constante v_0 .

- 1) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par la vitesse de l'écoulement ?
- 2) Proposer la forme la plus simple possible du champ des vitesses vérifiant ces conditions.
- 3) Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure ?

Un bloc parallélépipédique, de surface carrée de côté $a = 10\text{cm}$ et de masse $m = 1\text{kg}$, est posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à l'horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c'est-à-dire enduit d'une huile de viscosité dynamique η . La plaque se met alors en mouvement. On suppose que l'écoulement de l'huile peut être modélisé de la même manière qu'au début de cet exercice, avec une épaisseur $e = 1\text{mm}$ d'huile. Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = 9,8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- 4) En déduire l'équation du mouvement du bloc.
- 5) Après un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à la valeur $v_f = 0,5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. En déduire la viscosité η de l'huile.
- 6) Quelle est la durée du régime transitoire ?