

Electrostatique

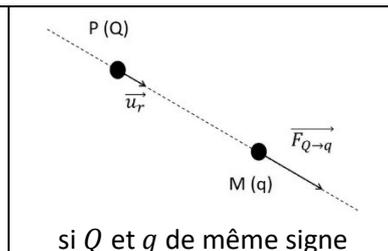
Champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges

Loi de Coulomb

Soit une particule chargée en P de charge Q , respectivement M de charge q . On note $r = PM$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{PM}}{PM}$, et la permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

Force électrostatique (ou de Coulomb) = force exercée par la charge Q sur q :

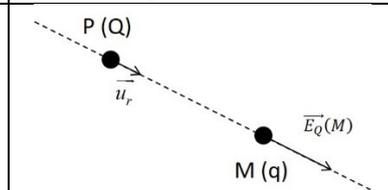
$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3}$$



Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrostatique ($V \cdot m^{-1}$) créé par Q en M est :

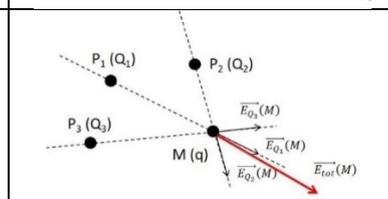
$$\vec{E}_Q(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3}$$



Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Le champ électrostatique total $\vec{E}_{tot}(M)$ est égal à la superposition des champs électrostatiques créés par chacune des charges ponctuelles Q_i au point M :

$$\vec{E}_{tot}(M) = \sum_i \vec{E}_{Q_i}(M)$$



Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Distribution volumique de charges électriques

Densité volumique de charges ρ ($C \cdot m^{-3}$) :

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Champ électrostatique :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dq = \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dV$$

Charge totale : $Q = \int_Q dq = \iiint_V \rho dV$

Champ total : $\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dV$

Distribution surfacique de charges électriques

Densité surfacique de charges σ ($C \cdot m^{-2}$) :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Champ électrostatique :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dq = \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dS$$

Charge totale : $Q = \int_Q dq = \iint_S \sigma dS$

Champ total : $\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dS$

Distribution linéique de charge électrique

Densité linéique de charges λ ($C \cdot m^{-1}$) :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Champ électrostatique :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dq = \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dl$$

Charge totale : $Q = \int_Q dq = \int_L \lambda dl$

Champ total : $\vec{E}(M) = \int_L \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dl$

Symétries et invariances du champ électrostatique

Principe de Curie :

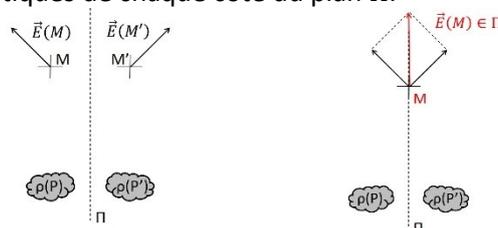
Lorsque des causes produisent des effets, les symétries des causes doivent se retrouver dans celles des effets.

Symétries de la distribution de charges

Plan de symétrie Π = plan de symétrie géométrique et charges identiques de chaque côté du plan Π .

Si le plan Π est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors champs électrostatiques symétriques par rapport à Π .

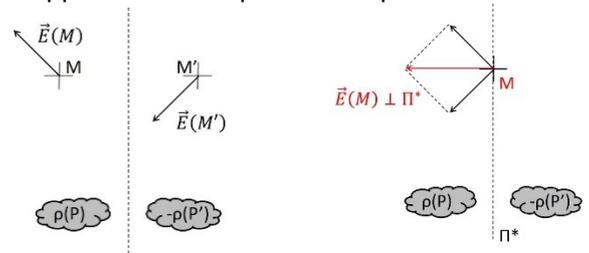
Si M appartient au plan de symétrie Π , alors le champ électrostatique est inclus dans le plan de symétrie Π .



Plan d'anti-symétrie Π^* = plan de symétrie géométrique et charges opposées de chaque côté du plan Π^* .

Si le plan Π^* est un plan d'anti-symétrie de la distribution de charge, alors champs électrostatiques anti-symétriques par rapport à Π^* .

Si M appartient au plan d'anti-symétrie Π^* , alors le champ électrostatique est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie Π^* .



Invariances de la distribution de charges

Invariance par translation suivant un axe : champ électrostatique indépendant de la coordonnée selon l'axe.

Invariance par rotation autour d'un axe : champ électrostatique indépendant de la coordonnée angulaire.

Théorème de Gauss

Flux du champ électrostatique à travers une surface S = intégrale du champ à travers cette surface.

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Sur une surface Σ est fermée :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Théorème de Gauss : Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée Σ (surface de Gauss) est égal au rapport de la charge intérieure (à cette surface) à la permittivité du vide :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Analogies entre champ électrostatique et champ de gravitation :

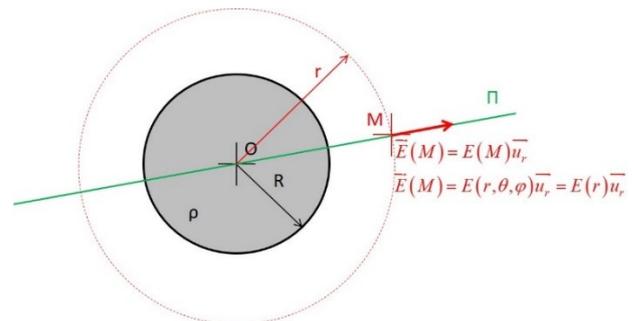
Champ électrique	Champ de gravitation
Force de Coulomb : $\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r$	Force gravitationnelle : $\vec{F}_{M \rightarrow m} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$
Charge : q	Masse : m
Constante : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	Constante : $-G$
Champ électrique : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$	Champ de gravitation : $\vec{G}(M) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{dS} = -4\pi G M_{int}$

Sphère uniformément chargée en volume

Plans de symétrie de la distribution de charges : plans passant par le centre de la sphère et par le point $M(r, \varphi, \theta)$. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\vec{u}_r$

Invariance par rotation de la distribution de charges autour de O , d'où : $\vec{E} = E(r, \varphi, \theta)\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$

Surface de Gauss (Σ) : sphère de centre O , de rayon r



$$\text{Flux : } \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = \oiint_{\Sigma} E(r)dS = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = E(r)4\pi r^2$$

$$\text{Charge intérieure : } \begin{cases} r \leq R & Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \\ r > R & Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \end{cases}$$

$$\text{Champ électrostatique : } \begin{cases} r \leq R & \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\vec{u}_r \\ r > R & \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

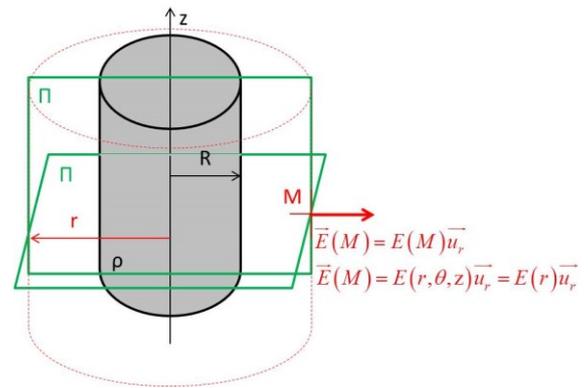
$$r > R : \vec{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \text{Champ électrostatique créé par une charge placée à l'origine de charge } q = Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Cylindre « infini » uniformément chargé en volume

Plans de symétrie de la distribution de charges : plan contenant l'axe du cylindre et le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre passant par le point M . Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\vec{u}_r$

Invariance par translation le long de l'axe du cylindre et par rotation autour du même axe, d'où : $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$

Surface de Gauss (Σ) : cylindre fermé d'axe Oz , de rayon r et de hauteur h



Flux : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{latérale}} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r + \iint_{\text{transversales}} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_z = \iint_{\text{latérale}} E(r)dS = E(r)2\pi rh$

Charge intérieure : $\begin{cases} r \leq R & Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \rho \\ r > R & Q_{\text{int}} = \pi R^2 h \rho \end{cases}$

Champ électrostatique : $\begin{cases} r \leq R & \vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r \\ r > R & \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{cases}$

Plan « infini » uniformément chargé en surface

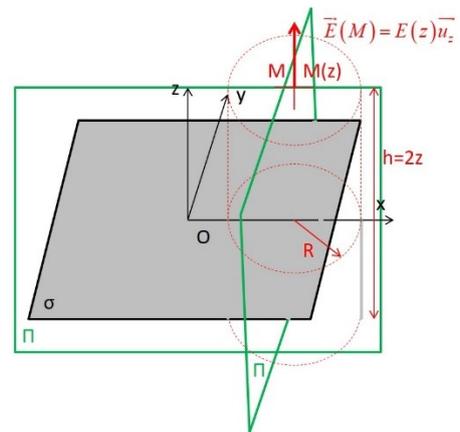
Plans de symétrie de la distribution de charges : plans contenant l'axe Mz . Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\vec{u}_z$

Invariance par translation selon x et y de la distribution de charge : $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{u}_z = E(z)\vec{u}_z$

Parité : plan contenant la distribution de charge (xOy) = plan de symétrie de la distribution de charge. Champ électrostatique symétrique par rapport à ce plan. Donc : $E(-z) = -E(z)$

La fonction est impaire.

Surface de Gauss (Σ) : cylindre d'axe Mz , de rayon R et de hauteur h fermé par des disques aux côtes z et $-z$ ($h = 2z$)



Flux :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{latérale}} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_r + \iint_{\text{disque}(z)} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{\text{disque}(-z)} E(-z)\vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) \\ &= \iint_{\text{disque}(z)} E(z) \cdot dS + \iint_{\text{disque}(-z)} E(z) \cdot dS = 2E(z) \iint_{\text{disque}(z)} dS = 2E(z)\pi R^2 \text{ pour } z > 0 \end{aligned}$$

Charge intérieure : $Q_{\text{int}} = \pi R^2 \sigma$

Champ électrostatique : $\begin{cases} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z > 0 \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z < 0 \end{cases}$

Potentiel électrostatique

Circulation du champ électrostatique entre A et B :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Opérateur gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \vec{u}_z$$

Différence de potentiel entre deux points A et B = circulation du champ électrostatique entre ces points.

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Relation locale :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Propriété : Le champ électrostatique est dit à **circulation conservative** : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Pour une charge ponctuelle Q placée à l'origine du repère, agissant sur une particule de charge q en M , on retrouve les expressions et équivalences suivantes :

Force et énergie potentielle	Lien	Champ et potentiel
$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q\vec{E}(M)$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
$E_p(M) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$	$E_p(M) = qV(M)$	$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$
$E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$	Relation intégrale	$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$
$\vec{F} = -\text{grad}(E_p)$	Relation locale	$\vec{E} = -\text{grad}(V)$

Condensateur plan

$$\text{Armature supérieure : } \begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > \frac{d}{2} \\ \vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\text{Armature inférieure : } \begin{cases} \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > -\frac{d}{2} \\ \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

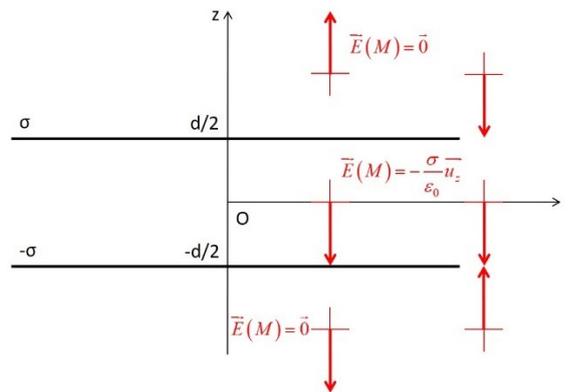
$$\text{Théorème de superposition : } \begin{cases} \vec{E} = \vec{0} & \text{pour } z > \frac{d}{2} \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ \vec{E} = \vec{0} & \text{pour } z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\text{Différence de potentiel : } U = V\left(\frac{d}{2}\right) - V\left(-\frac{d}{2}\right) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed$$

$$\text{Capacité d'un condensateur plan : } C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \text{ avec } Q = \sigma S$$

$$\text{Energie électrique stockée : } U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 S d E^2$$

$$\text{Densité volumique d'énergie électrostatique : } u_E = \frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$



Topographie du champ électrostatique

Définitions :

Le champ électrique est tangent à des courbes appelées **lignes de champ** qui sont orientées dans le sens du champ.

Un **tube de champ** est formé par un ensemble de lignes de champ qui s'appuyant sur un contour fermé.

Une **surface équipotentielle** est une surface formée d'un ensemble de points au même potentiel.

Propriétés :

- le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.
- le champ électrique est perpendiculaire en tout point à une surface équipotentielle
- Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée sur elle-même.
- en un point M où le potentiel a un maximum relatif, se trouve une charge positive et inversement pour un minimum relatif et une charge négative.
- dans une région sans charge, si les lignes de champ se resserrent alors le champ électrique est plus intense.
- l'intersection de lignes de champ correspond à un point où se trouve une charge ponctuelle ou où le champ est nul.