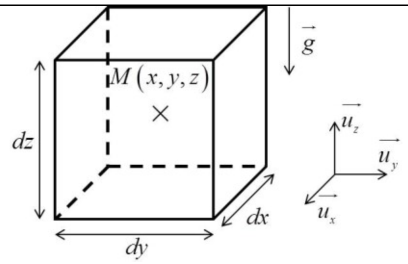
Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen



Hypothèses : régime stationnaire, référentiel galiléen, base cartésienne
Système fermé : particule de fluide centrée sur le point $M(x,y,z)$ de volume $dV = dxdydz$, de masse $dm = \mu(M)dV$ soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u_z}$
Sujet : étude du champ de pression $P(M)$

Bilan des forces :

Forces de pesanteur : $\overrightarrow{dF_V} = -\mu(M)gdV\vec{u_z}$

Forces de pression : $\overrightarrow{dF_S} = \begin{cases} \left(P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right) - P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\right)dydz\vec{u_x} \\ \left(P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right) - P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)\right)dxdz\vec{u_y} \\ \left(P\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right) - P\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)\right)dxdy\vec{u_z} \end{cases}$

Principe fondamental de la dynamique : $\overrightarrow{dF_V} + \overrightarrow{dF_S} = \vec{0}$

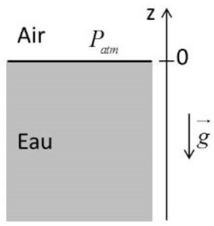
Projection sur les axes : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{dP}{dz}(z) = -\mu(z)g \end{cases}$ => Pression indépendante des coordonnées x et y

Relation de statique des fluides :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\mu g}$$

Cas d'un fluide incompressible et homogène :
Hypothèses : Pression à la surface de l'eau P_{atm} et axe (Oz) orienté vers le haut

$$\boxed{P(z) = P_{atm} - \mu g z}$$



Cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait :
Hypothèses : Fluide compressible, température uniforme T_0, pression à altitude nulle P_{atm} et axe (Oz) vers le haut
Masse volumique : $\mu = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}dz$
Intégration entre une altitude nulle et z :

$$\boxed{P(z) = P_{atm}\,exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad avec \quad H = \frac{RT_0}{Mg}}$$

Comparaison des deux modèles :

Lorsque la variation d'altitude est très faible : $P(z) = P_{atm}\,exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right) \simeq P_{atm} - \mu(z=0)gz$

=> Cohérence entre les deux modèles