

Propagation

Hypothèses : dans le vide, en absence de charges et courants

Equation de propagation du champ électromagnétique

Equations de Maxwell :	Equation de propagation, équation d'onde, équation de d'Alembert :
$(MG) \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (MA) \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $(MT) \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (MF) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ $\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Célérité de l'onde ou vitesse de propagation de l'onde :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Onde plane progressive

Résolution générale d'une équation d'onde scalaire à une dimension

Soit $s(x, y, z, t)$ vérifiant $\Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

Définitions :

Onde **plane** si, à chaque instant, $s(x, y, z, t)$ a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la **direction de propagation** (définie par un vecteur unitaire \vec{n}).

Onde plane **progressive** : le signal se propage dans un sens déterminé.

Propriété :

Solutions de l'équation de propagation selon x = superposition de deux ondes planes progressives :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow s(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad \text{ou} \quad s(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Solutions de l'équation de propagation du champ électromagnétique

Hypothèse : propagation selon les x croissants

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} B_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de **transverses**.

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}$$

Aspect énergétique

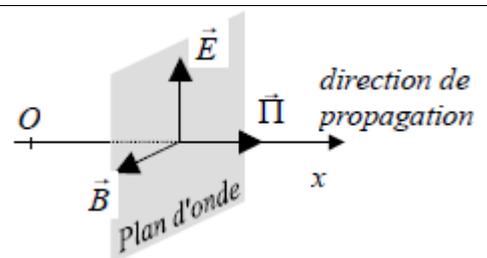
Densité volumique d'énergie électromagnétique équirépartie entre terme électrique et terme magnétique :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2$$

Vecteur de Poynting dirigé selon la direction de propagation :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c \epsilon_0 E^2 \vec{u}_x = c u \vec{u}_x$$

L'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c .

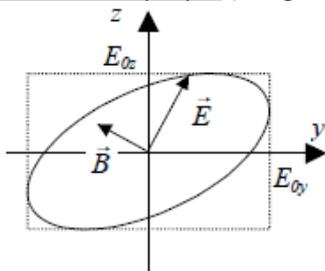


Etats de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

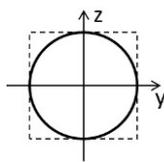
Définition :

La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur \vec{E} , comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de \vec{E} dans un plan d'onde.

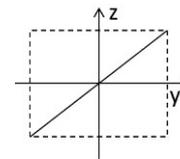
Polarisation elliptique (cas général) :



Polarisation circulaire :



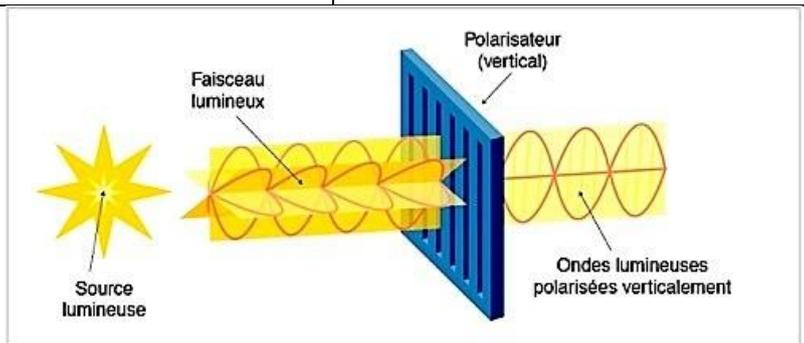
Polarisation rectiligne : Champs \vec{E} et \vec{B} en phase (ou opposition de phase)



Mise en évidence d'une polarisation rectiligne :

On place un autre polariseur à la suite du premier.

Si les deux polariseurs ont leur axe de transmission perpendiculaire, le champ électrique à la sortie de l'analyseur est nul.



Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

Retour sur l'équation d'onde scalaire

Définition :

Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f .

Une OPPM se propageant à la vitesse v selon la direction donnée par un vecteur unitaire \vec{n} s'écrit sous la forme :

$$s(x, y, z, t) = s_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

où \vec{r} représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes.

Elle est caractérisée par : - sa **pulsation**, ω , ou sa **fréquence**, f , ou sa période temporelle, T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- son **vecteur d'onde**, \vec{k} , ou sa **longueur d'onde**, λ :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$$

Elle présente une **double-périodicité** temporelle de période T et spatiale de période λ telle que :

$$\lambda = vT$$

Application au champ électromagnétique

Propagation unidimensionnelle et polarisation rectiligne suivant Oy : $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix}$

Propagation 3D et polarisation rectiligne suivant Oy : $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix}$

Relation de dispersion :

Champs électrique et magnétique forment avec le vecteur d'onde un trièdre direct :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$$

Notation complexe et polarisation rectiligne suivant Oy : $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\underline{E}_0 = E_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \vec{u}_y$



Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

Conducteur parfait : $\gamma \rightarrow +\infty \Rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{0}, \rho \rightarrow 0, \vec{B} \rightarrow \vec{0}, \vec{j} = \vec{0}$

Champ électrique incident dans le vide $x < 0$: $\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t - k_i x) \vec{u}_y$

En $x > 0$: conducteur parfait

Relation de passage pour le champ \vec{E} en $x = 0$, champ réfléchi : $\vec{E}_r = -E_{0i} \cos(\omega t + k_i x) \vec{u}_y$

Superposition des deux donne : $\vec{E}_{vide} = 2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y$

Relation de passage pour le champ \vec{B} en $x = 0$, courant à la surface du conducteur parfait : $\vec{j}_s = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$

Propriété : Réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait = **réflexion totale** avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Pas de charges surfaciques.

La superposition des ondes incidentes et réfléchies sur un conducteur parfait donne naissance à une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une **onde stationnaire**. L'onde ne se propage plus. Elle oscille sur place. L'onde stationnaire résultante ne transporte pas d'énergie.

La réflexion induit un **courant surfacique** non nul de même direction que le champ incident. Ce courant est à son tour une source de champ électromagnétique à l'origine du champ réfléchi.

