Devoir maison 13

Troisième problème : A propos du théorème de Gauss

Dans tout le problème, ε_0 représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

Première partie : Le théorème de Gauss

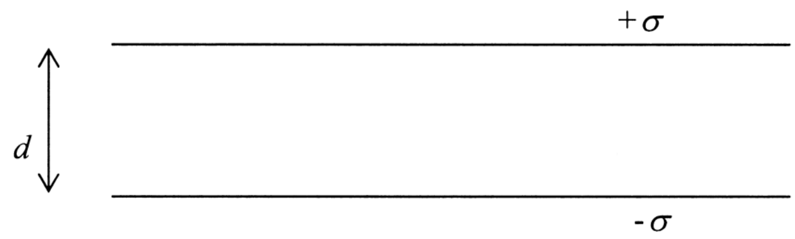
1 – Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int}.
Donner l'expression de l'équation de Maxwell qui permet de démontrer le théorème de Gauss.

Deuxième partie : Condensateur plan

2 – On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ est orthogonal au plan.
Démontrer que $\vec{E}$ est tel que sa norme E vaut $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur $\vec{E}$ de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

3 – Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d. Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.

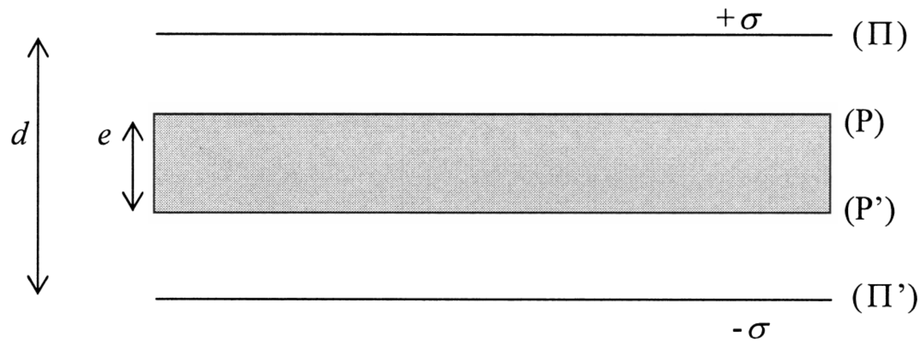


3.1 – En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.2 – Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de ε_0, σ et d. Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

3.3 – Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ε_0 et d.

4 – On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur e est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal.
Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure P et inférieure P' de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

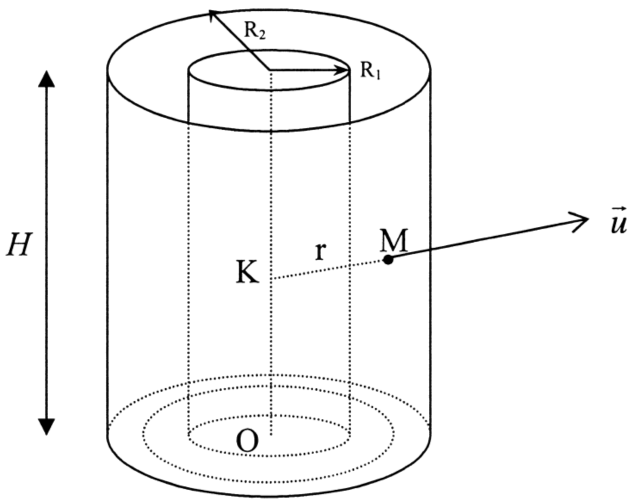
5 – En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge σ_P et $\sigma_{P'}$ qui apparaissent sur les surfaces P et P' de la plaque métallique. Exprimer σ_P et $\sigma_{P'}$ en fonction de σ.

6.1 – Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre P et Π d'une part et entre P' et Π' d'autre part).
En déduire la différence de potentiel U' entre les deux armatures du condensateur. On exprimera U' en fonction de σ, e, d et ε_0.

6.2 – En déduire la capacité surfacique C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de e, d et ε_0. Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.

Troisième partie : Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur H et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique $Q > 0$. L'armature externe porte une charge totale $-Q$.
Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2. Soit un point M situé à la distance $r = KM$ de l'axe : $R_1 < r < R_2$. K est la projection orthogonale du point M sur l'axe du condensateur.



Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite (KM) dirigé de K vers M.
On admettra que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé au point M est radial et sa norme ne dépend que de r. On peut donc écrire : $\vec{E} = E(r)\ \vec{u}$.
On néglige les effets de bord.

7 – En appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera, déterminer l'expression de $E(r)$. On exprimera $E(r)$ en fonction de Q, ε_0, r et H. On distinguera les cas selon que $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$.

8 – En déduire le potentiel $V(r)$ à une distance r de l'axe lorsque $R_1 < r < R_2$. On exprimera $V(r)$ en fonction de Q, H, V_1, R_1, ε_0 et r. En déduire la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux armatures du condensateur en fonction de Q, ε_0, H, R_1 et R_2.

9 – Déterminer la capacité C du condensateur en fonction de ε_0, H, R_2 et R_1.

10 – On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie u_{el} égale à $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.
En utilisant l'expression de $E(r)$ déterminée précédemment et en intégrant l'expression de u_{el} déterminer l'énergie W_{cond} accumulée par le condensateur. On exprimera W_{cond} en fonction de Q, ε_0, H, R_1 et R_2. En déduire l'expression de W_{cond} en fonction de Q et C.

11 – En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question 9, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques.