Outils mathématiques

Extrait du programme

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en oeuvre du programme de physique de la classe de deuxième année TSI sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 1 du programme de première année et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.
Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année. L'expression des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.
Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent sera mis sur le rôle des conditions aux limites.
Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles seront mobilisées principalement dans le cours de chimie sur la thermodynamique de la transformation chimique ; les fondements feront l'objet d'une étude dans le cadre du chapitre « calcul différentiel » du cours de mathématique.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1. Analyse vectorielle (cf. Cours de Mécanique des fluides et Electromagnétisme)	
Gradient	Connaître le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Utiliser le théorème d'Ostrogradski fourni. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Utiliser le théorème de Stokes fourni. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir Δf = div (grad f). Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle :rot(rotA) = $-\Delta$A + grad(divA).
2. Équations aux dérivées partielles (cf. Cours de conduction thermique et Electromagnétisme)	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielle connue. Transposer une solution fréquemment rencontrée dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
3. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée.

Sommaire

1 Fonctions d'une seule variable

1.1 Dérivée d'une fonction d'une seule variable

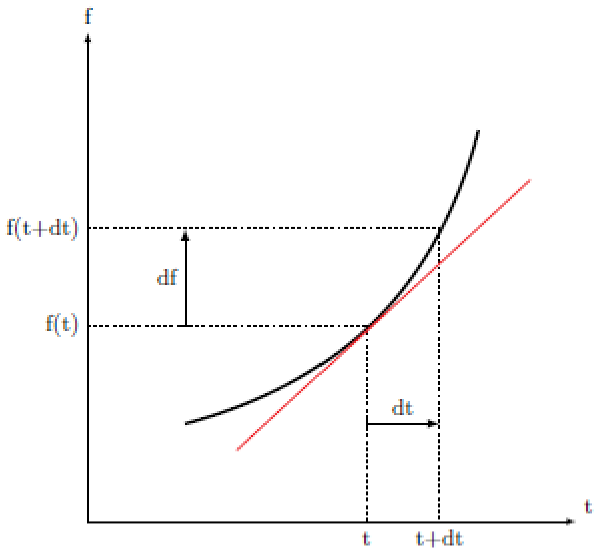
Considérons une fonction f dépendant d'une variable t que l'on note $f(t)$.
La dérivée de f par rapport à t est :

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{dt \to 0} \left(\frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \right)$$

La notation "d" signifie que dt est infiniment petit. On dit que c'est un **élément infinitésimal**, donc $dt \to 0$.
Pour simplifier la notation de dérivée, on écrit donc tout simplement :

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}}$$

La dérivée s'interprète géométriquement comme la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f



Notation :

Vu en TSI1 : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ou encore $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Dérivée seconde de f par rapport à t : $\frac{d^2f}{dt^2}$

Dérivée p-ième de f par rapport à t : $\frac{d^pf}{dt^p}$

Exemple :

On considère un point M se déplaçant selon l'axe Ox, alors $f(t) = x(t)$. La vitesse du point M selon Ox s'écrit :

1.2 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

En multipliant par dt, on peut réécrire cette égalité d'une autre manière : $df(t) = f(t+dt) - f(t)$

$df(t)$ est nommée différentielle de f en t. La différentielle de f représente la variation de f lorsque t varie de t à $t + dt$.

Exemple :

Le déplacement élémentaire de M selon l'axe Ox est représenté par la différentielle de $x(t)$:

Soit un point se déplaçant de A vers B pendant un temps τ selon l'axe Ox à la vitesse uniforme v_0, alors :

1.3 Intégration d'une fonction d'une seule variable

L'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

Exemple :

On considère un point M se déplaçant selon l'axe Ox. On connait la vitesse $v(t)$ du point M selon Ox. On souhaite retrouver sa position $x(t)$.

Remarque :

Toujours préciser les bornes d'une intégrale !

1.4 Dérivée de fonctions composées

Considérons une fonction f qui dépend d'une variable x, cette variable x étant elle-même une fonction d'une variable t. On peut donc considérer f comme une fonction de x ou comme une fonction de t. On peut donc écrire $f(x)$ ou $f(t)$ ou $f\big(x(t)\big)$. En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on obtient :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Remarque :

La notation différentielle est donc particulièrement adaptée pour traiter les dérivées de fonctions composées car elle fait apparaître de manière explicite la variable choisie pour la dérivation.

Exemple :

L'énergie cinétique d'un point M se déplaçant selon Ox s'écrit :

Sa dérivée par rapport à v est donc :

Or, v est une fonction du temps t, on peut donc cherche à dérivée l'énergie cinétique par rapport à t :

2 Fonctions de plusieurs variables

Les grandeurs qui vont être étudiées en physique-chimie cette année peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Ce sont donc des fonctions de plusieurs variables.

Exemple :

Dans une base cartésienne, la vitesse d'un point matériel se déplaçant selon Ox peut dépendre de x et t :

2.1 Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

On peut dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ses variables, les autres étant fixées. On dit alors que l'on fait une dérivation partielle et on utilise la notation ∂.

Exemple :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à t :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à x :

Dérivée partielle de la vitesse par rapport à x, t étant fixé :

On a donc pour la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction $f(x,y,z,t)$ de plusieurs variables :

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}\right)_{y,z,t} = \frac{f(x+dx,y,z,t) - f(x,y,z,t)}{dx}$$

2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Comme pour une fonction d'une seule variable, on peut définir la différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Elle représentera sa variation pour une variation infinitésimale de chacune de ses variables.

Exemple :

Pour la vitesse d'un point matériel se déplaçant selon Ox qui peut dépendre de x et t, sa différentielle s'écrit :

On admet donc l'écriture suivante pour la différentielle d'une fonction $f(x,y,z,t)$ de plusieurs variables :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt$$

En physique-chimie, la notion de différentielle est utilisée pour noter les variations élémentaires ou infinitésimales d'une grandeur.

2.3 Intégration d'une fonction de plusieurs variables

2.3.1 Intégrale simple

De la même manière que pour la dérivation, une fonction $f(x,y,z,t)$ dépendant de plusieurs variables peut être intégrée par rapport à l'une de ses variables. Les autres variables sont alors fixées. On note son intégrale par rapport à x : $\int f(x,y,z,t)dx$

Remarque :

Ne pas oublier de préciser la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction !

2.3.2 Intégrale double ou triple

Quand une grandeur dépend de plusieurs variables, on peut l'intégrer par rapport à deux de ses variables, on parle d'intégrale double.

L'intégrale double de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x et y s'écrit : $\iint f(x,y,z)dxdy$

Lorsque l'on intègre par rapport à trois de ses variables, on parle d'intégrale triple.

L'intégrale triple de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x,y et z s'écrit : $\iiint f(x,y,z)dxdydz$

Remarque :

Une intégrale double peut alors être aussi appelée intégrale de surface si les variables représentent une surface élémentaire (cf. partie 5).

De même, une intégrale triple peut être appelée intégrale de volume les variables représentent un volume élémentaire (cf. partie 5).

Si la fonction précédente peut s'écrire sous la forme : $f(x,y,z) = g(x)h(y)j(z)$, nous admettrons que, sous certaines conditions supposées vérifiées dans tout le cours de Physique-Chimie, :

$$\iiint g(x)h(y)j(z)dxdydz = \left(\int g(x)dx\right)\left(\int h(y)\,dy\right)\left(\int j(z)dz\right)$$

3 Développements limités

En physique-chimie, la résolution des problèmes ne requiert souvent que la connaissance du comportement de fonctions physiques au voisinage d'un point. On cherche donc à remplacer l'expression de la fonction au voisinage d'un point donné, par une expression plus simple à manipuler et donc à étudier.

3.1 Formule de Taylor

Le développement limité à l'ordre p d'une fonction f au voisinage de x_0 est donnée par la formule de Taylor :

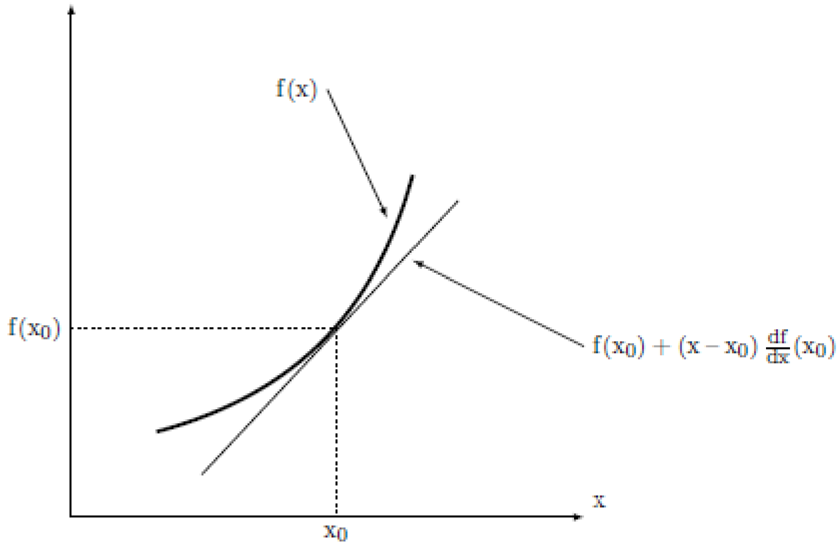
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{ordre\ 0} + \underbrace{(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)}_{ordre\ 1} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)}_{ordre\ 2} + \cdots + \underbrace{\frac{(x-x_0)^p}{p!}\frac{d^pf}{dx^p}(x_0)}_{ordre\ p}$$

3.2 Approximation linéaire

On se limitera la plupart du temps au développement limité à l'ordre 1 en physique ($|x-x_0| \ll 1$), ce qui donne :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)$$

Graphiquement, cela revient à confondre la fonction f avec sa tangente en x_0. On dit que l'on a linéarisé la fonction f au voisinage de x_0. Bien entendu, confondre les deux courbes n'a de sens qu'au "voisinage" de x_0 c.à.d. pour les x tels que $|x-x_0| \ll 1$.



Exemple :

On considère la vitesse d'un point M se déplaçant selon Ox. Cette vitesse dépend de x et de t.
On souhaite réaliser le développement limité à l'ordre 1 de la vitesse au voisinage de x_0.

3.3 Développements limités usuels en 0

Pour $x_0 = 0$ et $x \ll 1$, on obtient les développements limités usuels suivants :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots\big(a-(n-1)\big)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$sin(x) = x + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$tan(x) = x + \ldots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

4 Systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère de centre O servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

4.1 Coordonnées cartésiennes

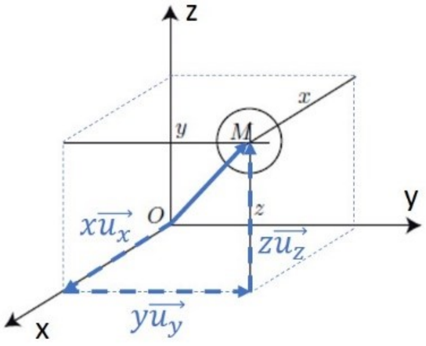
Dans le repère $\Re(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x, y, z).

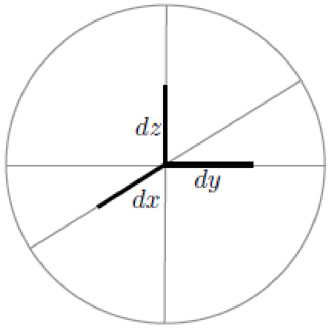
Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\Re}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\Re}$$





4.2 Coordonnées cylindriques

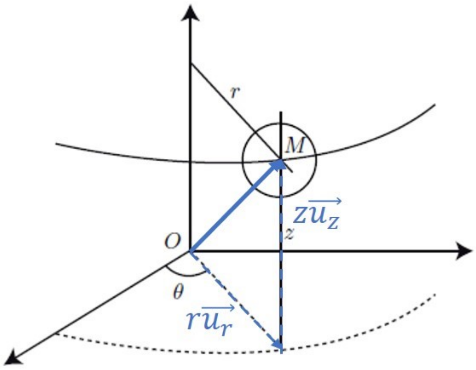
Dans le repère $\Re_{cyl}(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

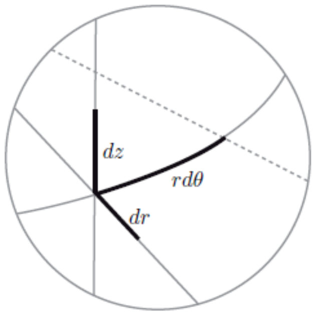
Vecteur position

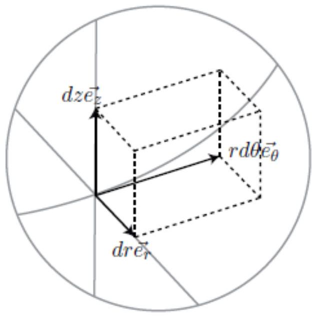
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\Re_{cyl}}$$







4.3 Coordonnées sphériques

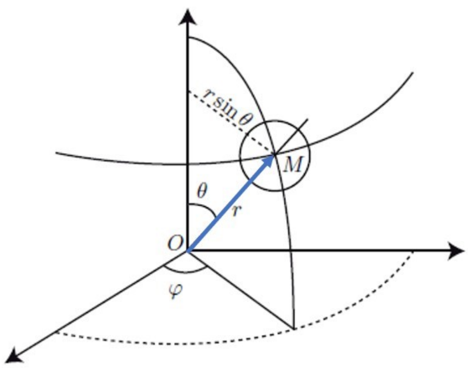
Dans le repère $\Re_{sph}(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ).

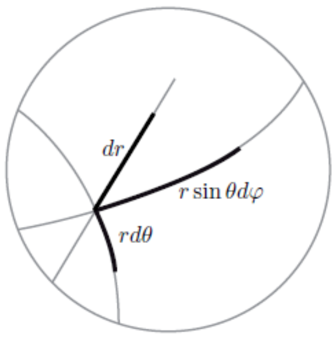
Vecteur position

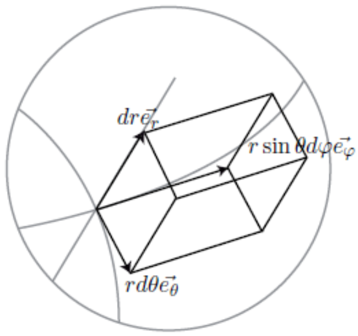
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{pmatrix}_{\Re_{sph}}$$







5 Surfaces et volumes élémentaires

5.1 Intérêt et méthodologie

Les grandeurs physiques (pression, champs, forces, …) que nous allons étudier cette année ne seront pas forcément uniformes. Elles peuvent alors varier en fonction des coordonnées choisies. Pour pouvoir les considérer uniforme, nous serons alors amenés à travailler sur de petites surfaces, appelées surfaces élémentaires, ou de petits volumes, appelés volumes élémentaires.

Pour pouvoir exprimer ces surfaces ou volumes élémentaires, la méthode est la suivante :

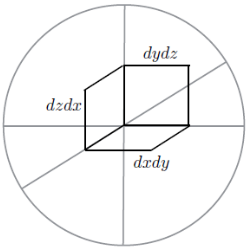
- Bien choisir le type de coordonnées adapté à la symétrie du problème
- Dessiner l'élément de volume ou de surface avant de l'exprimer mathématiquement
- Bien repérer les paramètres qui varient, leurs bornes et les paramètres qui restent fixes.

Pour calculer une surface ou un volume, il faut alors intégrer les surfaces ou volumes élémentaires correspondants. Ces intégrales sont des intégrales multiples. Leur résolution est abordée dans la partie 3.

5.2 Coordonnées cartésiennes

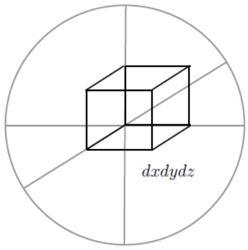
Surface élémentaire

$$\begin{cases} x = cte & dS = dydz \\ y = cte & dS = dxdz \\ z = cte & dS = dxdy \end{cases}$$



Volume élémentaire

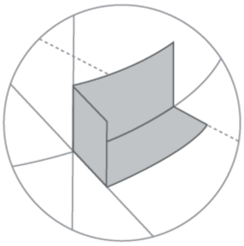
$$dV = dxdydz$$

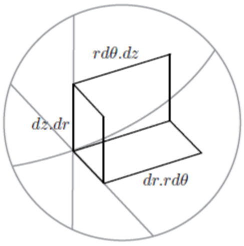


5.3 Coordonnées cylindriques

Surface élémentaire

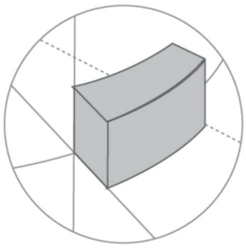
$$\begin{cases} r = cte & dS = rd\theta dz \\ \theta = cte & dS = drdz \\ z = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$





Volume élémentaire

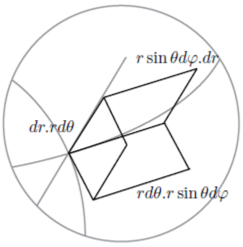
$$dV = rdrd\theta dz$$



5.4 Coordonnées sphériques

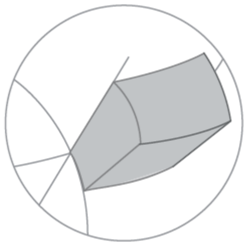
Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi \\ \theta = cte & dS = r \sin\theta \, drd\varphi \\ \varphi = cte & dS = rdrd\theta \end{cases}$$



Volume élémentaire

$$dV = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$$



6 Questions de cours

1) Donner l'expression de la différentielle de la fonction $f(x)$.

2) Donner l'expression de la dérivée de la fonction $f\left(x(t)\right)$ par rapport à t.

3) Quelle est la différence entre la notation d et la notation ∂ ? On pourra donner des exemples.

4) Donner l'expression de la différentielle de la fonction $f(x, y, z, t)$.

5) Donner le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de : $\sqrt{1+x}$ et e^x.

6) Donner le développement limité à l'ordre 1 de : $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ et $g(x) = ln(1+x)$.

7) En coordonnées cartésiennes, donner l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

8) En coordonnées cylindriques, donner l'expression du vecteur position et du vecteur déplacement élémentaire.

9) En coordonnées cartésiennes, donner les expressions des différentes surfaces élémentaires et du volume élémentaire.

10) En coordonnées cylindrique, donner les expressions des différentes surfaces élémentaires et du volume élémentaire.

7 Questions à choix multiples

En ligne sur la plateforme Moodle accessible via Atrium : section « Outils Mathématiques / QCM ».

8 Exercices

8.1 Fonction d'une seule variable

8.1.1 Energie interne d'un gaz parfait

On appelle transformation infinitésimale, une transformation au cours de laquelle la variation des fonctions d'état la décrivant varie très peu. Ainsi, au cours d'une transformation infinitésimale, l'énergie interne varie de dU. Or, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température. On peut alors écrire : $dU = C_V dT$.

Lors d'une transformation entre un état 1 et un état 2, la température du gaz parfait passe de T_1 à T_2. Cette transformation étant la somme de transformations infinitésimales, comment peut-on écrire ΔU, variation d'énergie interne entre ces deux états ?

On suppose que la capacité thermique à volume constant C_V du gaz parfait est constante.

8.1.2 Cinétique chimique

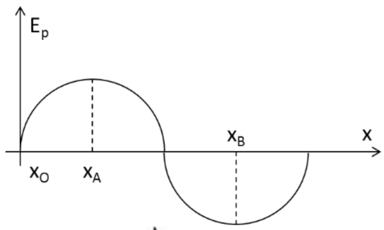
On s'intéresse à la réaction chimique suivante d'ordre 2 par rapport à A : $aA + bB \rightarrow cC + dD$

On rappelle que la vitesse volumique de réaction est définie par : $v = \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt} = k[A]^2$

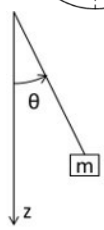
1) Retrouver l'équation différentielle vérifiée par la concentration $[A]$.

2) Exprimer alors $[A]$ en fonction du temps.

8.1.3 Stabilité d'une position d'équilibre



1) Le graphe suivant représente l'énergie potentielle d'un point M en fonction de la coordonnée cartésienne x. En $x = x_A$ et $x = x_B$, le point M passe par une position d'équilibre, la première instable, la seconde stable. Comment peut-on retrouver ces positions d'équilibres sans représentation graphique ?



2) On s'intéresse au mouvement de la masse m suspendue au bout d'un fil (cf figure). Son énergie potentielle de pesanteur peut se mettre sous la forme : $E_{pp} = -mgl\cos\theta$. En déduire alors les positions d'équilibres et leur stabilité relative. Tracer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de θ.

8.2 Fonctions de plusieurs variables

8.2.1 Onde plane progressive monochromatique

1) Soit la fonction f telle que $f(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$. Quelles sont les variables de cette fonction ? Donner les expressions des dérivées partielles premières et secondes. Que remarque-t-on ?

8.2.2 Loi des gaz parfaits

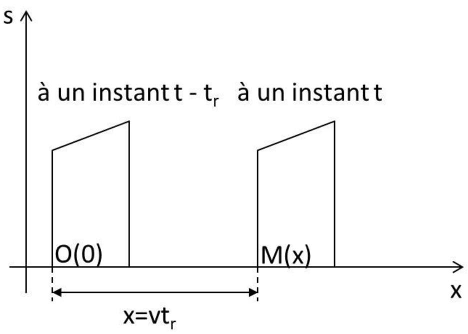
On étudie un système fermé composé d'un gaz parfait.

1) Exprimer le volume en fonction de variables et de constantes que l'on identifiera.

2) Donner l'expression de la différentielle du volume, dV.

3) Le gaz parfait subit une transformation isotherme. Exprimer la variation de volume en fonction des pressions à l'état initial P_1 et final P_2.

8.2.3 Onde plane progressive



On s'intéresse à une onde progressive $s(x,t)$ qui se propage d'un point O vers un point M de coordonnée x telle que : $s(x,t) = s(M,t) = s(O,t-t_r)$.
Cette onde se propage à une vitesse v si bien que $t_r = \frac{x}{v}$ Alors : $s(x,t) = s\left(0, t-\frac{x}{v}\right) = s\left(t-\frac{x}{v}\right)$

1) Montrer que : $\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial s}{\partial t}$

2) Montrer que $s(x,t)$ est solution de l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

8.2.4 Résultante des forces de pression

Un piston comprime un fluide dans une conduite horizontale rectangulaire de hauteur H et de largeur L. On considère dans un premier temps que la pression au sein du fluide est uniforme et égale à P_1, tandis que la pression à l'extérieur du piston est égale à P_0.
1) Quelle est la résultante des forces de pression sur le piston ?
2) On considère maintenant le cas d'un barrage vertical de hauteur H et de largeur L. Ce barrage est trop haut pour pouvoir considérer la pression uniforme dans l'eau qu'il retient. Pour un axe Oz orienté vers le haut et une origine de l'axe prise à la surface de l'eau, la pression dans l'eau varie selon : $P(z) = P_0 - \mu g z \quad pour \quad z \leq 0$.
Pour pouvoir considérer la pression au sein de l'eau comme uniforme, il faut travailler sur une surface élémentaire sur laquelle la résultante des forces de pression peut s'écrire : $\overrightarrow{dF_s} = -P(M)dS\vec{n}$ où $\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface.
Quelle est la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage ?

8.3 Systèmes de coordonnées

1) Comment définit-on la vitesse d'un point matériel M dans le repère$\Re_{cyl}(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$? En déduire l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.
2) Dans une base cartésienne, le point M parcourt un carré de côté a. Quelle est la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour ? On posera un repère adapté (faire un dessin) et on utilisera des intégrales.
3) Dans une base cylindrique, le point M parcourt un cercle de rayon a. Quelle sera la distance D parcourue par le point M au bout d'un tour (utiliser une intégrale) ? Comparer au périmètre du cercle.
4) Même question en coordonnées sphériques lorsque le point M parcourt un cercle de rayon a dans le plan Oxy.

8.4 Surfaces et volumes élémentaires

1) Retrouver l'aire d'un carré de côté $\boldsymbol{a}$.
2) Retrouver le volume d'un parallélépipède de côté a selon x, b selon y et c selon z.
3) Retrouver l'expression de la surface latérale d'un cylindre de rayon r_0 et de hauteur h.
4) Retrouver le volume d'un cylindre de rayon $r_0$et de hauteur h.
5) Que vaut l'intégrale suivante : $\iint_\Sigma dS$?
6) Quelle est la surface comprise entre deux cercles concentriques de rayons $r_0 \ et \ r_1$?
7) Retrouver le volume d'une sphère de rayon r_0.
8) Retrouver la surface d'une sphère de rayon r_0.