Energie du champ électromagnétique

Extrait du programme

Dans la partie **4**, on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. **Énergie du champ électromagnétique**	
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; densité volumique de puissance Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme globale.

Sommaire

1 BILAN D'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE 3
1.1 DENSITE VOLUMIQUE D'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE 3
1.2 PUISSANCE VOLUMIQUE CEDEE PAR LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE AUX PORTEURS DE CHARGE 3
1.3 PUISSANCE RAYONNEE 4
1.4 EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE 4
2 BILAN ENERGETIQUE DANS UN CONDUCTEUR OHMIQUE 6
2.1 LOI D'OHM LOCALE 6
2.2 FORME INTEGRALE DE LA LOI D'OHM 6
2.3 DENSITE VOLUMIQUE DE PUISSANCE CEDEE PAR EFFET JOULE 7
3 QUESTIONS DE COURS 8
4 QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES 8
5 EXERCICES TYPE ECRIT (A RENDRE EN DM POUR LE 25/01/2021) 9
5.1 PROTECTION CONTRE LA FOUDRE ET PRISE DE TERRE 9
6 EXERCICES TYPE ORAL 10
6.1 BILAN D'ENERGIE DANS UN CONDUCTEUR OHMIQUE 10
6.2 CAS PARTICULIER DU CONDENSATEUR PLAN 10
6.3 CAS PARTICULIER DU SOLENOÏDE 10

L'étude de l'induction en première année a mis en évidence une énergie magnétique. L'étude du condensateur en électrostatique a mis en évidence une énergie électrique et l'on a vu la densité volumique correspondante. Ce chapitre vise à généraliser des notions touchant l'ensemble du champ électromagnétique.

1 Bilan d'énergie électromagnétique

1.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Définition :

Les champs électrique et magnétique régnant dans une portion de l'espace vide entraînent la localisation d'une énergie dont la densité volumique, u (J.m^{-3}), s'écrit :

Remarque :

Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t l'énergie électromagnétique U contenue dans ce volume est :

La diminution de cette énergie peut se retrouver sous deux formes :

- puissance cédée à la matière, P (ou aux porteurs de charges)
- puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement, $P_{rayonnée}$

1.2 Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge

1.2.1 Densité volumique de force électromagnétique

Une particule de masse m, caractérisée par sa charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$, soumise à un champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$, se trouvant à l'instant t en un point M, subit une force $\vec{F}$ appelée **force de Lorentz** (force électromagnétique) :

Si la modélisation de la charge est volumique (on raisonne sur un élément de volume $d\tau$), de densité volumique de charges ρ, animée d'une vitesse $\vec{v}$, la force élémentaire exercée sur ce volume s'écrit :

Définition :

La densité volumique de force électromagnétique s'exerçant sur un volume élémentaire $d\tau$, de densité volumique de charges ρ animée d'une vitesse $\vec{v}$, se met sous la forme :

1.2.2 Puissance volumique cédée aux porteurs de charge

La puissance dP reçue par la charge dans le volume $d\tau$ est donc :

<u>Définition</u> :
La densité volumique de puissance, p (W.m^{-3}), cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est :

1.3 Puissance rayonnée

<u>Définition</u> :
La puissance rayonnée, $P_{rayonnée}$, par le champ électromagnétique à travers une surface S est égale au flux d'un vecteur appelée vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$:

<u>Définition</u> :
Le vecteur densité de courant d'énergie rayonnée ou **vecteur de Poynting** représente la densité surfacique de puissance rayonnée et s'écrit :

1.4 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique

On peut donc écrire la diminution de l'énergie électromagnétique sous la forme :

On a donc l'équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique suivante :

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

Principe de conservation de l'énergie électromagnétique :
L'énergie électromagnétique est une grandeur conservative. Ce principe se traduit par l'équation locale :

Démonstration (en passant par les équations de Maxwell) :
On multiplie l'équation de Maxwell-Ampère par le champ électrique :

On a l'identité suivante : $div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{B}$
Alors :

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

On retrouve l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique avec le vecteur de Poynting qui a pour expression :

Interprétation physique :
L'équation de conservation de l'énergie électromagnétique est composée de trois termes :
- Le premier terme correspond à la puissance rayonnée à travers la surface (S)
- Le second terme fait intervenir l'énergie électromagnétique contenue dans le volume (V)
- Le troisième terme correspond à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge.

2 Bilan énergétique dans un conducteur ohmique

Lorsqu'un champ électrique est appliqué dans un milieu possédant des porteurs de charges mobiles, un courant électrique apparaît. Un tel milieu est qualifié de conducteur. On constate alors expérimentalement, pour une très grande variété de matériaux, que la densité de courant est proportionnelle au champ appliqué.

2.1 Loi d'Ohm locale

Loi d'Ohm locale :

Dans de nombreux cas, si le champ appliqué est suffisamment faible alors le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique sont liés par une relation empirique faisant intervenir la conductivité γ du milieu ($S.m^{-1}$) :

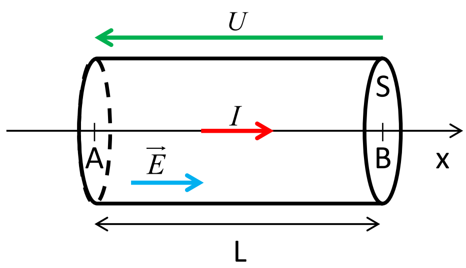
Remarque :

La conductivité est une grandeur toujours positive.

2.2 Forme intégrale de la loi d'Ohm

On souhaite ici retrouver la loi d'Ohm telle qu'elle a été vue en TSI1 ($U = RI$) et donc montrer la proportionnalité entre tension et courant dans un conducteur ohmique.

On considère une portion de conducteur cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L, traversé par un courant I et de tension à ses bornes U baignant dans un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E_0\overrightarrow{u_x}$. Le matériau présente une conductivité γ constante.



La tension aux bornes du conducteur peut se mettre sous la forme :

Le courant traversant le conducteur est alors :

On trouve donc bien un rapport de proportionnalité entre tension et courant. On appelle **résistance électrique** ce rapport :

Remarque :

Analogie avec la résistance thermique : $R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$

2.3 Densité volumique de puissance cédée par effet Joule

D'après la loi d'Ohm locale, la puissance volumique cédée aux porteurs de charge se met sous la forme :

Propriété :

La puissance dissipée par effet Joule s'identifie donc à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge du conducteur. Sa densité volumique de puissance se met sous la forme :

Remarques :

La puissance apportée aux porteurs de charge est donc toujours positive, ce qui signifie qu'elle est réellement apportée : le champ cède toujours de la puissance à la matière.

En régime permanent, cette puissance ne peut pas être emmagasinée par les porteurs de charge, ils la cèdent au réseau au cours des chocs inélastiques, et le réseau la cède à son tour à l'atmosphère par conduction thermique ou rayonnement : c'est l'effet Joule.

Forme intégrale :

On peut aussi l'écrire sous la forme :

En intégrant sur le volume (pour un courant constant), on retrouve la puissance totale cédée par effet Joule dans le conducteur cylindrique, soit :

On retrouve donc l'expression déjà utilisée en électronique en TSI1.

3 Questions de cours

1) Donner l'expression de la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
2) Donner la loi d'Ohm locale. Dans quel cas peut-on l'utiliser ? Quelle relation retrouve-t-on si on l'intègre ? Comment exprimer la résistance d'un conducteur cylindrique ?
3) Sous quelle forme peut-on réécrire la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge dans un conducteur ohmique ? En l'intégrant sur le volume d'un conducteur ohmique cylindrique, quelle expression retrouve-t-on ? Comment peut-on aussi nommer cette puissance ?
4) Démontrer l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. On expliquera bien la signification de chacun des termes.
5) Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique, du vecteur de Poynting et de la puissance rayonnée.

4 Questions à choix multiples

En ligne sur Moodle

5 Exercices type écrit (à rendre en DM pour le 25/01/2021)

5.1 Protection contre la foudre et prise de terre

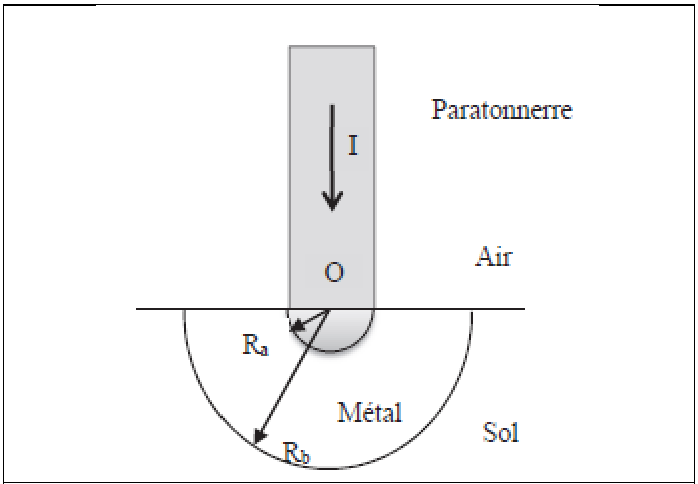


Figure 7. Modèle simplifié d'une prise de terre

Il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers.

Une prise de terre (figure 7) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a, et de rayon extérieur R_b. On note $\gamma_{\text{mét}}$, la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électriqueγ_{sol}.

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques $R_{métal}$ et R_{sol}, l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b, l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini.

Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant.

On suppose que le courant, qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques.

23) Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$.

24) Donner l'expression de la densité de courant $j(r)$ en fonction de I et de r.

25) Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.

26) En déduire en fonction de I, r et γ_{sol}, l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol. On supposera que $V = 0$ loin du point O.

27) Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.

On appelle R_h, la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de$a$.

Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée : I_{max}), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

Trouver une relation entre D, a, R_h, I, I_{max} et γ_{sol}.

28) En supposant$D >> a$, exprimer D en fonction de$a$, R_h, I, I_{max} et γ_{sol}.

29) Application numérique : évaluer D pour$I = 5{,}0.10^4 A$.

30) Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux, ...) ou les petits animaux (lapins, renards, ...) ?

On considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique γ, comprise entre les rayons R_{int} et R_{ext} et parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r + dr$.

31) Exprimer en fonction de γ, r etdr, la résistance élémentaire dR_C d'une coque hémisphérique élémentaire.

32) En déduire en fonction de γ , R_{int} et R_{ext} , la résistance totale R_C de la coque hémisphérique.

33) Donner l'expression de la résistance globale, notée R_{glob} de la prise de terre en fonction de γ_{met}, γ_{sol}, R_a et R_b.

34) Application numérique : évaluer R_{glob} pour $R_a = 1{,}0cm,\ R_b = 35cm, \gamma_{met} = 6{,}0S.m^{-1}$.

35) La législation en termes de sécurité électrique impose que $R_{glob} < 25\Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

6 Exercices type oral

6.1 Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I selon Oz uniformément répartie et de conductivité γ uniforme. Il est de section S , de rayon a, de longueur L et dirigé selon Oz.

1) Donner la loi d'Ohm locale.

2) En déduire la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.

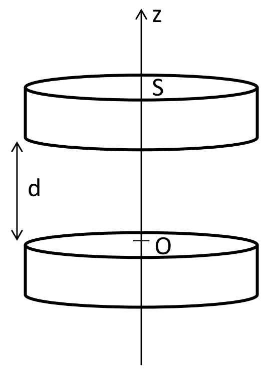
3) Donner l'expression du champ magnétique crée par le cylindre pour $r > a$. On supposera le cylindre infini.

4) Donner l'expression du vecteur de Poynting en fonction de I, γ, S en $r = a$.

5) En déduire la valeur de la puissance entrant par rayonnement dans le dipôle en $r = a$. Conclure.

6.2 Cas particulier du condensateur plan

6.2.1 Bilan d'énergie en régime stationnaire



On considère un condensateur plan dont les armatures de charges opposées $(Q, -Q)$ ont une surface S, un rayon R et sont distantes de d. Le champ électrostatique créé entre ses deux armatures est uniforme de norme E_0. La tension à ses bornes est notée U.

1) Déterminer l'expression du champ électrostatique entre ses armatures (que l'on pourra supposées infinies dans cette question). On donnera alors l'expression de E_0 en fonction de Q, S et ε_0.

2) Déterminer alors l'expression de la tension U entre ses bornes en fonction de E_0 et d.

3) Exprimer la capacité C d'un condensateur plan en fonction de ses dimensions S, d et ε_0.

4) En déduire l'expression de l'énergie U_E stockée dans le condensateur en fonction de E_0 et de ses dimensions.

5) Comparer à la densité volumique d'énergie électrique, u_E.

6.2.2 Bilan d'énergie dans le cadre de l'ARQS

On effectue le bilan énergétique d'un condensateur lors de sa charge très lente (ARQS).

Dans le cadre de l'ARQS : $R\omega \ll c$. On pose aussi : $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

On note $q(t) = q_0\, cos(\omega t)$ la charge de l'armature du condensateur située en $z = d$.

6) Réécrire l'expression du champ électrique entre les 2 armatures en fonction de S, $q(t)$ et ε_0. La variation du champ électrique est à l'origine de l'existence d'un courant de déplacement. Quelle est son expression en fonction de de S et $q(t)$?

7) Quelle est la valeur de la densité de courant volumique $\vec{j}$ entre les deux armatures ? Quelle est l'expression du champ magnétique entre les deux armatures de surface S ? (Utiliser le théorème d'Ampère généralisé). Donner alors sa valeur pour $r = R$.

8) Comparer les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de la densité volumique d'énergie. Donner alors l'expression de l'énergie électromagnétique, U, stockée dans le condensateur. Où est-elle localisée ? Donner aussi l'expression de la dérivée de U par rapport au temps.

9) Quelle est l'expression du vecteur de Poynting ? Exprimer alors la puissance rayonnée à travers la surface latérale du condensateur.

10) Faire un bilan d'énergie. Conclure.

6.3 Cas particulier du solénoïde

6.3.1 Bilan d'énergie en régime stationnaire

On considère un solénoïde d'axe Oz, de longueur l contenant N spires de section S de rayon a parcouru par un courant i.

1) Déterminer l'expression du champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde (que l'on considèrera infini dans cette question) en le supposant nul à l'extérieur. On notera B_0 sa norme que l'on exprimera en fonction de μ_0, N, l et i.

2) Déterminer le flux propre ϕ_{propre} du solénoïde.

3) Retrouver l'expression de l'inductance L du solénoïde en fonction de ses dimensions S et l et de N et μ_0.

4) En déduire l'expression de l'énergie U_M emmagasinée dans la bobine en fonction de B_0 et de ses dimensions.

5) Comparer à la densité volumique d'énergie magnétique, u_M.

6.3.2 Bilan d'énergie dans le cadre de l'ARQS

Le solénoïde est maintenant parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0\, cos(\omega t)$. On suppose le courant variant suffisamment lentement pour se placer dans l'ARQS et que les lois de la magnétostatique soient applicables.

Dans ce cadre : $a\omega \ll c$. On pose aussi : $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

6) Rappeler l'expression du champ magnétique qui existe à l'intérieur du solénoïde en fonction de $i(t)$.

7) En déduire l'expression du champ électrique à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday en tout point M à l'intérieur du solénoïde. Donner en particulier la valeur du champ électrique pour $r = a$.

8) Comparer les ordres de grandeur des termes électrique et magnétique de la densité volumique d'énergie. Donner alors l'expression de l'énergie électromagnétique, U, stockée dans une portion de longueur d du solénoïde. Où est-elle localisée ? Donner aussi l'expression de la dérivée de U.

9) Calculer l'expression du vecteur de Poynting, puis sa puissance rayonnée à travers la paroi du solénoïde (cylindre d'axe (Oz) de rayon a et de hauteur d).

10) Interpréter les résultats précédents.

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$