Description d’un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

Extrait du programme

La partie **4** introduit le point de vue eulérien pour l'étude des écoulements. Il s'agit de décrire simplement un écoulement en identifiant des tubes de courant sur lesquels des bilans pourront ensuite être effectués. On pourra faire le lien avec la signification physique des opérateurs rotationnel et divergence introduits dans le cours d'électromagnétisme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Description d’un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite.	
Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire.	Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d’un fluide à l’aide des grandeurs intensives pertinentes.
Lignes et tubes de courant.	Déduire le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement à l'aide d'une carte de champ de vitesse fournie.
Débit massique.	Exprimer le débit massique en fonction de la vitesse d’écoulement. Exploiter la conservation du débit massique.
Débit volumique.	Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide incompressible en écoulement.
Fluides parfaits. Fluides newtoniens : notion de viscosité.	Caractériser un fluide parfait par un profil de vitesse uniforme dans une même section droite. Citer des ordres de grandeur de viscosité de gaz et de liquides (dans le cadre des machines hydrauliques et thermiques, des lubrifiants, …). Relier l’expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse. Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d’un fluide dans une conduite. Lier qualitativement l’irréversibilité d’un écoulement à la viscosité.

Sommaire

1 Description eulérienne d'un fluide

Etude du fluide à l'échelle

Système : particule de fluide désignée par le point M, de volume dV et de masse δm, en un instant t.

Description du fluide à l'aide de 2 grandeurs intensives :

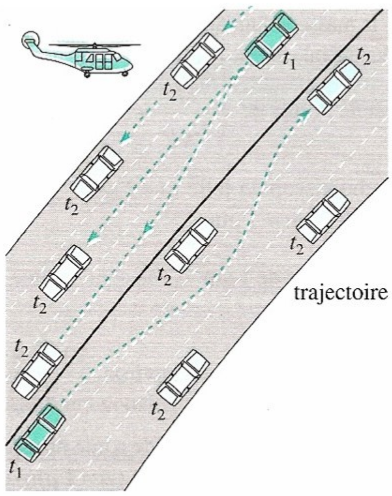
-

-

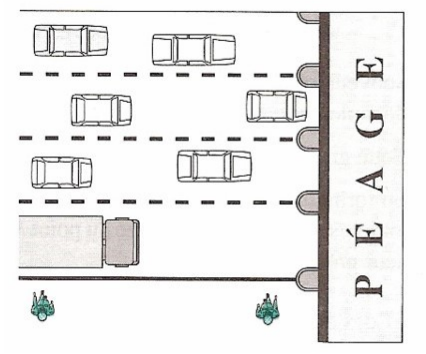
<u>Description Eulérienne</u> :

<u>Exemple</u> :

Description Lagrangienne ≠ **Description Eulérienne**



On observe les trajectoires des divers véhicules (entre t = t_1 et t = t_2)



Les deux gendarmes observant les vitesses des véhicules se sont placés en formalisme eulérien pour décrire l'écoulement du trafic. A la même date t, ils n'observent pas les mêmes véhicules.

<u>Hypothèse du cours</u> : Ecoulement **stationnaire**

La pression, la masse volumique ou encore la vitesse ne dépendront plus du temps et s'écriront respectivement :

$$P(M),\ \mu(M),\ \vec{v}(M)$$

Liens :

https://www.youtube.com/watch?v=mdN8OOkx2ko#t=311

https://www.youtube.com/watch?v=zUaD-GMARrA

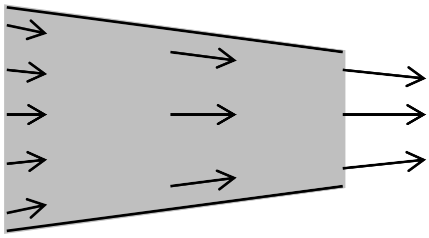
https://www.youtube.com/watch?v=iItS2O8Fcf8

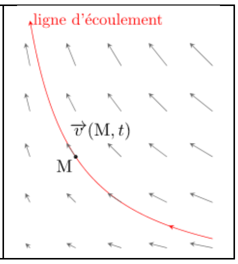
2 Visualisation d’un écoulement

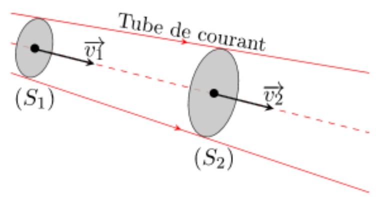
2.1 Lignes et tubes de courant

Carte de champ : représentation graphique plane où on va représenter le vecteur vitesse en un certain nombre de points. La direction indiquée par une flèche sur la carte sera celle de la vitesse en ce point et la longueur de la flèche sera proportionnelle à la norme de la vitesse.

Exemple :
Carte de champ pour une conduite dont la section diminue



Définition : **Ligne de courant**	

Définition : **Tube de courant**	

2.2 Exemples d’écoulements

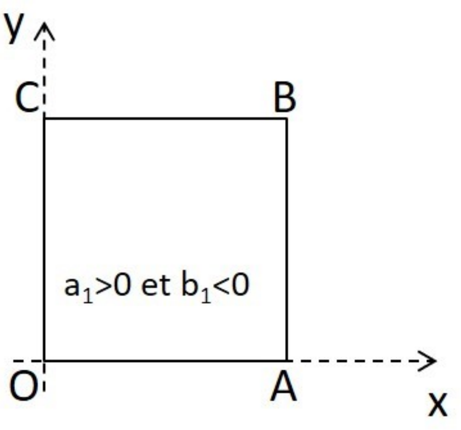
Ecoulement **uniforme** :

Ecoulement **divergent** :

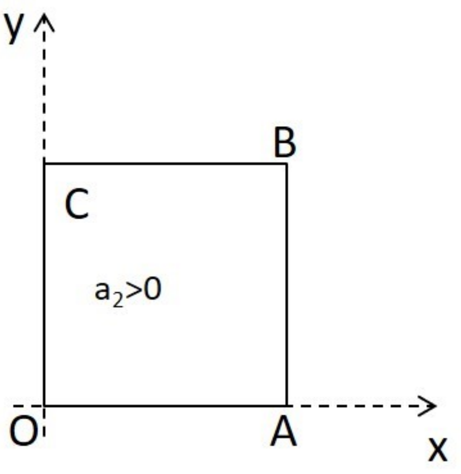
Ecoulement **rotationnel** :

<u>Exemples</u> : Particule de fluide cubique de côté L

1) Ecoulement divergent et non rotationnel : $\overrightarrow{v_1} = a_1 x\overrightarrow{u_x} + b_1 y\overrightarrow{u_y}$



2) Ecoulement non divergent et rotationnel : $\overrightarrow{v_2} = -a_2 y\overrightarrow{u_x} + a_2 x\overrightarrow{u_y}$



<u>Liens</u> :

http://www.femto-physique.fr/simulations/mecaflu_simu1.php

http://www.femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/mecaflu_C1.php

https://youtu.be/rB83DpBJQsE?t=207

5 Questions de cours

1) Expliquer ce que représente la description eulérienne d'un fluide.
2) Définir la notion de ligne de courant et de tube de courant.
3) Qu'appelle-t-on écoulement uniforme, divergent, rotationnel ? Donner des exemples.
4) Définir les débits massiques et volumiques. Donner leurs expressions en fonction de la vitesse d'écoulement du fluide pour un écoulement unidimensionnel ou un écoulement quelconque. Comment peut-on relier ces deux débits ?
5) Démontrer qu'il y a conservation du débit massique en régime stationnaire. Que se passe-t-il si le fluide est de plus incompressible ?
6) Qu'est-ce qu'un fluide parfait ? un fluide Newtonien ?
7) Donner la définition de la force de cisaillement intervenant dans un fluide visqueux. On n'oubliera pas de préciser les conventions choisies. Donner les unités des termes entrant dans l'équation.
8) Que vaut la viscosité dans un fluide parfait ? D'un point de vue thermodynamique, à quoi peut-on associer la viscosité ?

6 Questions à choix multiples

En ligne sur la plateforme Moodle accessible via Atrium : section « Thermo / Description… / Test ».

7 Exercices Terminale STI2D

7.1 Remplissage d'une baignoire

Une baignoire peut contenir 220 litres d'eau.

1) Calculer le débit massique du robinet sachant que la baignoire se remplit en 15 min.

2) En déduire le débit volumique de ce robinet.

L'eau circule dans la maison dans des canalisations en cuivre ou en PEHD de 18 mm de diamètre avant d'être répartie en fonction des besoins des appareillages avec des diamètres inférieurs. Le tuyau qui aliment la baignoire a un diamètre de 12 mm.

3) Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement d'eau à la sortie du robinet.

4) En considérant que la réduction du diamètre du tuyau d'alimentation s'effectue en régime permanent, calculer alors la vitesse moyenne de l'écoulement dans la canalisation de 18 mm.

7.2 Distribution d'eau d'arrosage

Un robinet d'eau de jardin standard débite en moyenne 15 L d'eau chaque minute.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement dans la canalisation de diamètre 19 mm.

2) On raccorde à la sortie du robinet trois tuyaux de 15 mm de diamètre à l'aide d'une dérivation. Que peut-on dire du débit dans les tuyaux par rapport à celui dans la canalisation ?

3) Calculer la vitesse d'écoulement dans les tuyaux.

7.3 Débit cardiaque

Dans les conditions de repos, le débit cardiaque à la sortie de l'aorte est égal à environ 6 L/min chez un adulte. On considère l'aorte de section $S = 3.10^{-4} m^2$. Le sang s'écoule, dans cette artère, à un vitesse moyenne v.

Donnée : masse volumique du sang $\mu = 1060 kg.m^{-3}$

1) Montrer que le débit volumique est $D_V = 1.10^{-4} m^3.s^{-1}$.

2) Calculer le débit massique D_m du sang.

3) Quelle est la vitesse moyenne de l'écoulement du sang dans l'artère.

7.4 Lance à incendie

En France, les pompiers disposent d'une lance de grande puissance de 1000 L/min avec un diamètre d'entrée de 100 mm et un diamètre de sortie de 25 mm.

1) Déterminer la vitesse de l'eau dans le tuyau puis sa vitesse d'expulsion.

2) Quel est l'intérêt d'une vitesse aussi élevée ?

3) Déterminer le volume puis la masse d'eau projetée en 25 min.

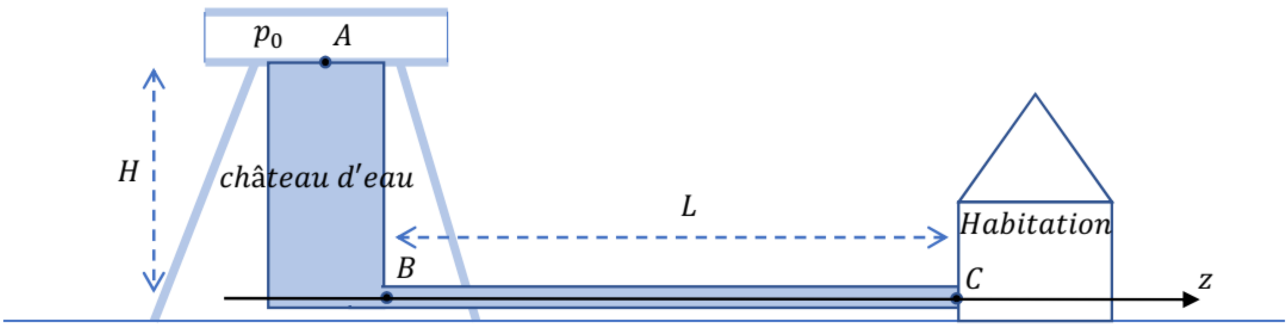
8 Exercices type écrit (à faire en DM pour le 07/10/2019)

8.1 ATS 2019

II- Résistance hydraulique

a) Loi de Poiseuille

On considère une installation simplifiée constituée d'un château d'eau alimentant une habitation. L'eau dans le réservoir atteint une hauteur $H = 30\ \mathrm{m}$ supposée constante. L'eau circule dans une canalisation cylindrique de rayon $a = 20\ \mathrm{mm}$ et de longueur L avant d'atteindre le robinet de la maison.



La pression atmosphérique p_0 est supposée uniforme, la masse volumique de l'eau supposée incompressible est notée ρ et l'intensité du champ de pesanteur terrestre est notée g. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On ouvre le robinet en C et on remplit une baignoire de 180 L en 30 minutes.

16) Evaluer numériquement le débit volumique D_v en C en $\mathrm{m^3.s^{-1}}$.

17) En déduire la vitesse moyenne v_B de l'écoulement en B et la calculer. On prendra $\frac{1}{4\pi} \approx 0{,}08$.

18) Pour l'écoulement d'un fluide parfait incompressible en régime stationnaire, le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant AB est $p_A + \frac{1}{2}\rho.v_A^2 + \rho.g.z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho.v_B^2 + \rho.g.z_B$ avec $v_A << v_B$ et $p_A = p_0$ donc $\boxed{p_B = p_0 - \frac{1}{2}\rho.v_B^2 + \rho.g.H}$

19) Comparer numériquement v_B^2 et $2gH$. En déduire une expression simple de p_B. Commenter ce résultat.

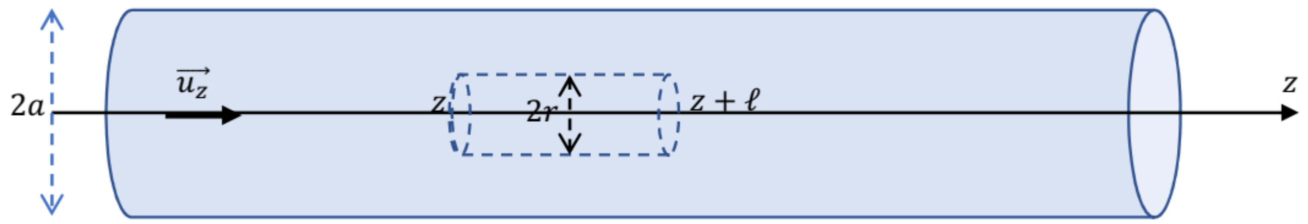
On souhaite caractériser l'écoulement stationnaire entre les points B et C en tenant compte de la viscosité dans la canalisation. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses de la forme :

$\vec{v}(M) = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$.

Avec la géométrie proposée, on donne l'opérateur divergence $\mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ et l'opérateur gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

20) On admet que la vitesse selon z ne dépend pas de z

Le résultat précédent implique que <u>le mouvement de toute particule de fluide est rectiligne et uniforme.</u> Nous allons étudier le déplacement d'un volume V cylindrique de fluide, de rayon $r < a$, d'axe z et de longueur $\ell < L$:



Dans la suite, <u>on néglige l'effet du poids</u> dans la canalisation horizontale d'axe z. Le mouvement de ce volume V est assuré par des forces pressantes. On supposera que le champ des pressions p dans la canalisation est fonction uniquement de z , on a donc $p(z)$.

21) Donner l'expression de la résultante $\overrightarrow{F_n}$ des forces de pression s'exerçant sur V.

Parallèlement, ce volume V subit des forces de viscosité par le fluide qui l'entoure et qui se déplace à une vitesse différente. On donne la loi phénoménologique de Newton définissant la force tangentielle subie par chaque élément dS de la paroi latérale de V :

$$d\overrightarrow{F_t} = \eta \frac{dv_z(r)}{dr} dS\overrightarrow{u_z}$$

où η est le coefficient de viscosité dynamique de l'eau.

22) Donner l'expression de la résultante des forces $\overrightarrow{F_t}$ de viscosité s'exerçant sur V en fonction de $\frac{dv_z(r)}{dr}$.

23) La prise en considération de la viscosité de l'eau implique la condition $v_z(r = a) = 0$. En déduire alors que $v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\eta\ell}(a^2 - r^2)$ où $\Delta p = \big(p(z) - p(z+\ell)\big)$.

24) Exprimer le débit volumique D_v dans la conduite et en déduire la loi de Poiseuille reliant le débit volumique à la perte de charge Δp : $D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta\ell}\Delta p$.

25) Montrer, à l'aide d'une analogie électrocinétique, que l'on peut définir une résistance hydraulique R_h entre les points B et C.

26) Expliquer alors l'intérêt des châteaux d'eau.

b) <u>Résolution de problème</u>

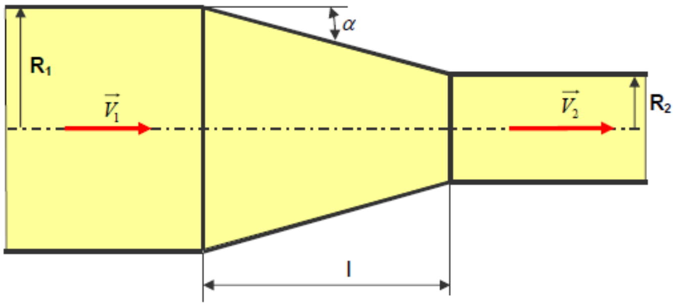
La question suivante n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Une rédaction complète et soignée de la problématique posée est attendue, et toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie. Si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

27) Un Français consomme en moyenne 150 L d'eau par jour et le volume d'eau dans un château d'eau est typiquement $V_c = 2500\ \mathrm{m}^3$. Quelle serait alors la distance moyenne séparant deux châteaux d'eau en France en supposant que l'on n'utilise pas plus de la moitié des réservoirs chaque jour ? La distance « à vol d'oiseau » est de 1000 km entre Dunkerque et Perpignan et aussi entre Brest et Strasbourg.

9 Exercices type oral

9.1 Conservation du débit

On veut accélérer la circulation d'un fluide incompressible en écoulement stationnaire dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α.



1) Calculer le rapport des rayons $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$.

2) En déduire la longueur l.

Données : $R_1 = 50mm$ et $\alpha = 15°$

9.2 Ecoulement sanguin

A la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon $a_0 = 1cm$. Le débit volumique est $D_V = 6L.min^{-1}$ et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. Sa masse volumique vaut $\mu = 1{,}0.10^3 kg.m^{-3}$.

1) Quelle est la vitesse v du sang dans l'aorte ? On supposera que le champ des vitesses est uniforme sur une section

Le sang est évacué du cœur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise en N_a artères de rayon a_a, puis en N'_a artérioles de rayon $a'_a = 20\mu m$. Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{V,a} = 2.10^{-6} m^3.s^{-1}$.

2) Calculer le nombre N_a d'artères.

3) Faire de même le nombre total d'artérioles N'_a sachant que la vitesse du sang dans une artériole est $v'_a = 5mm.s^{-1}$.

9.3 Modélisation d'un tourbillon de vidange

On modélise, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), le tourbillon de vidange d'un lavabo par un cœur cylindrique de rayon a et d'axe (Oz) dans lequel la vitesse (pour $r < a$) est donnée par $\overrightarrow{v_1} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$ où ω est la vitesse angulaire du fluide.

Dans la zone périphérique qui entoure le cœur (pour $r > a$), le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v_2} = \frac{C}{r}\overrightarrow{u_\theta}$, où C est constante.

En coordonnes cylindriques : $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$

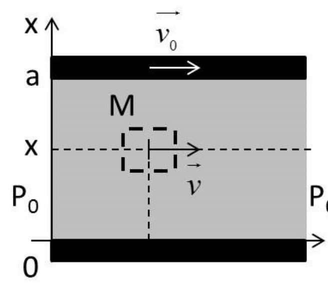
1) Tracer l'allure de la vitesse en fonction de r. En déduire l'expression de la constante C sachant que la vitesse est continue en $r = a$.

2) Montrer que l'écoulement n'est rotationnel que dans une région que l'on précisera.

3) On se place dans la zone périphérique du tourbillon. Donner l'allure des lignes de courants dans un plan orthogonal à (Oz). Décrire brièvement le mouvement d'un bouchon placé à la surface de l'eau dans cette zone. Le bouchon tourne-t-il sur lui-même ? Tourne-t-il autour de l'axe du tourbillon ?

9.4 Ecoulement de Couette plan

Un fluide incompressible de masse volumique μ et de viscosité dynamique η est en écoulement stationnaire dans une conduite de longueur L selon (Oz), entre deux plaques l'une en $x = 0$ fixe et l'autre en $x = a$ animée d'une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_z}$. Le champ des vitesses s'écrit donc : $\vec{v} = v_z(x)\overrightarrow{u_z}$. La pression est supposée être la même en entrée et en sortie de la conduite égale à P_0. Soit une particule de fluide de volume dV appartenant à cet écoulement, centrée sur le point $M(x, y, z)$ et assimilée à un point matériel.



1) Faire un bilan des forces sur la particule de fluide.
2) Donner l'expression de la vitesse de cette particule de fluide.

9.5 Modélisation d’une lubrification

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur e entre deux plaques horizontales très longues. La plaque du dessous est immobile et celle de dessus possède la vitesse constante v_0.

1) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par la vitesse de l’écoulement ?

2) Proposer la forme la plus simple possible du champ des vitesses vérifiant ces conditions.

3) Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure ?

Un bloc parallélépipédique, de surface carrée de côté $a = 10cm$ et de masse $m = 1kg$, est posé sur un plan incliné d’un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l’horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c’est-à-dire enduit d’une huile de viscosité dynamique η. La plaque se met alors en mouvement. On suppose que l’écoulement de l’huile peut être modélisé de la même manière qu’au début de cet exercice, avec une épaisseur $e = 1mm$ d’huile. Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = 9{,}8 m.s^{-2}$.

4) En déduire l’équation du mouvement du bloc.

5) Après un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à la valeur $v_f = 0{,}5 m.s^{-1}$. En déduire la viscosité η de l’huile.

6) Quelle est la durée du régime transitoire ?