

Devoir Surveillé 4 – Niveau Centrale

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions et d'y répondre dans l'ordre sur sa copie.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

ATTENTION :

- La rédaction doit être faite à l'encre noire ou bleue. Les couleurs doivent être réservées à l'encadrement des résultats et/ou les schémas.
- Les encres vertes et violettes sont interdites.
- Sont interdits également : les stylos plumes, les correcteurs type « Typex » ou « blanco », les stylos à friction.

Détecteur de métaux

Les détecteurs de métaux sont des instruments électroniques capables d'indiquer la présence de masses métalliques de nature et de taille différentes (FIGURE 1). Les détecteurs fixes sont utilisés dans les aéroports, dans l'industrie agro-alimentaire ou pharmaceutique, sur les réseaux routiers, etc. Les détecteurs mobiles peuvent servir à localiser et suivre le cheminement de canalisations enterrées ou de fils électriques, à aider aux fouilles archéologiques, à repérer des engins dangereux, etc.

Les détecteurs de métaux fonctionnent selon des principes variés dépendant de l'utilisation souhaitée. Ici, nous étudierons dans un premier temps un capteur de déplacement, puis les câbles nécessaires pour faire transiter l'information et enfin, le silicium, élément essentiel pour tout composant intégré.



FIGURE 1. DIVERS DETECTEURS DE METAUX

Aide aux calculs :

$\frac{2 \times \pi \times 8,85}{\ln(5,0)} = 34,5$	$\ln(5,0) = 1,6$	$8,31 \times 125042 = 1,04 \cdot 10^6$
$(3,68)^{0,25} = 1,39$	$\frac{1,39 \times 8}{8,31 \times 1,730} = 0,77$	$\frac{3,2}{6,41} = 0,50$
$\frac{1,8}{6,01} = 0,30$	$\frac{4,0 \times 8,31 \times 1,730}{8} = 7,2$	$\frac{7}{18} = 3$

I) Capteur de déplacement

Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créé par un solénoïde dans l'air, puis à partir de là au capteur lui-même, obtenu en insérant une partie mobile à l'intérieur du solénoïde. Les données utiles se trouvent en fin de partie I.

I.1) Etude du solénoïde

On considère un solénoïde de longueur l_0 et de rayon R recouvert de N spires jointives bobinées sur un cylindre rempli d'air, dans lesquelles circule un courant électrique d'intensité I (FIGURE 2). On considèrera que les propriétés magnétiques de l'air sont celles du vide. Tous les calculs de champ magnétique seront menés dans le cas du solénoïde illimité.

- 1) Donner l'énoncé du théorème d'Ampère. De quelle équation de Maxwell découle-t-il ? Donner son expression. Dans quelles conditions doit-on travailler pour que le théorème d'Ampère soit valable ? On démontrera le lien entre l'équation de Maxwell énoncée et la formule intégrale du théorème d'Ampère.
- 2) Donner l'allure des lignes de champ magnétique d'un solénoïde à l'intérieur d'un solénoïde infini. On fera pour cela une étude complète des symétries et invariances du problème.
- 3) En supposant le champ magnétique nul à l'extérieur du solénoïde, exprimer la norme B du champ magnétique en tout point intérieur du solénoïde.
- 4) Donner l'équation de Maxwell en la nommant se rapportant au phénomène d'induction. Quelle loi en déduit-on ?
- 5) En déduire l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance ou inductance propre L_0 du solénoïde, après en avoir rappelé la définition générale.

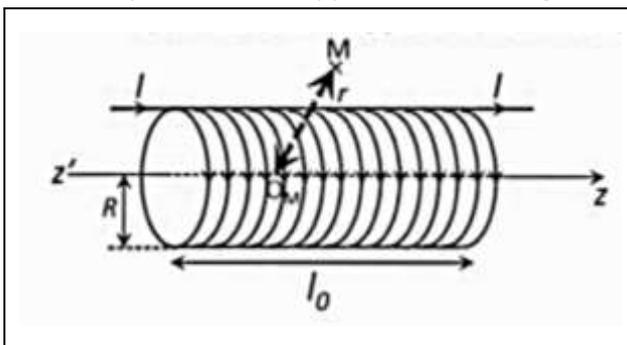


FIGURE 2. SOLENOÏDE DE LONGUEUR l_0 CONSTITUE DE N SPIRES JOINTIVES BOBINÉES SUR UN CYLINDRE REMPLI D'AIR, DANS LESQUELLES CIRCULE UN COURANT ÉLECTRIQUE D'INTENSITÉ I

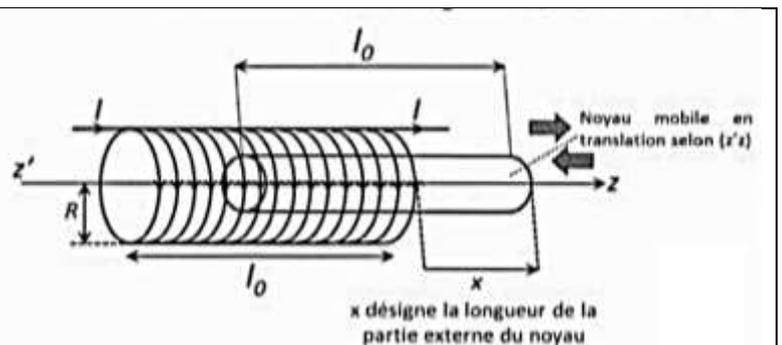


FIGURE 3. CAPTEUR MAGNÉTIQUE À INSERTION D'UN NOYAU AU SEIN DU SOLENOÏDE DE LA FIGURE 2 INITIALEMENT REMPLI D'AIR.

I.2) Etude du capteur

Le capteur étudié est représenté sur la FIGURE 3. Une partie mobile de longueur l_0 , appelée noyau, peut se déplacer en translation à l'intérieur du solénoïde initialement rempli d'air. Pour la suite de l'étude, nous admettrons les résultats suivants :

- L'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance : l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif δ .
 - Le coefficient d'auto-inductance du capteur peut être évalué comme celui résultant de la mise en série de deux solénoïdes :
 - Le premier, de longueur x , est rempli d'air,
 - Le deuxième, de longueur $l_0 - x$, contient le noyau.
- 6) Déterminer en fonction de N , l_0 et x , le nombre N_1 de spires de la partie gauche du solénoïde sans noyau et celui (N_2) de la partie droite avec le noyau interne.
 - 7) En déduire l'inductance propre de chaque partie en fonction de δ , L_0 , N , N_1 et N_2 puis l'inductance $L(x)$ en fonction de δ , L_0 , l_0 et x .
 - 8) Représenter graphiquement $L(x)$ en fonction de x si $0 < x < l_0$. On supposera $\delta \gg 1$.

I.3) Conditionnement des signaux par oscillateur

L'information de déplacement en provenance des capteurs inductifs peut être extraite à partir d'un oscillateur électronique (FIGURE 4). L'information de déplacement, qui induit une modification de l'inductance L est source d'une modification de la fréquence de résonance de l'oscillateur, aisément détectable, à l'aide d'un fréquencemètre. L'ALI utilisé, que l'on supposera parfait, est alimenté au moyen d'une alimentation symétrique $\pm V_{cc} = \pm 12V$ et sa tension de saturation est $V_{sat} = 11V$.

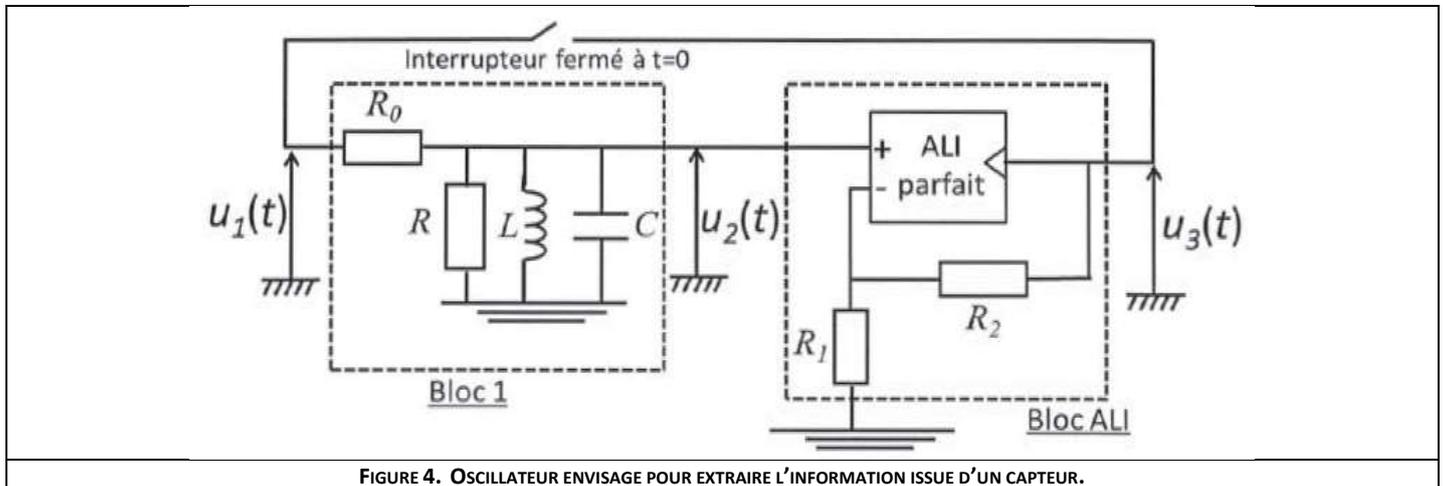


FIGURE 4. OSCILLATEUR ENVISAGE POUR EXTRAIRE L'INFORMATION ISSUE D'UN CAPTEUR.

Etude du bloc 1

9) Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \text{ avec } A_0 = 0,1, Q = 25, x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Préciser la nature de ce filtre. Exprimer \underline{H} en fonction de la valeur des composants du bloc 1 et de ω . Par identification, donner les expressions de A_0 , ω_0 et Q en fonction de la valeur de ces composants.

Etude du bloc ALI

10) Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe :

$$\underline{G} = \frac{u_3}{u_2}$$

On pose $K = |\underline{G}|$.

Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi le système bouclé.

- 11) Quel type d'oscillateur réalise-t-on ?
- 12) Dédire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par u_3 .
- 13) A partir de cette équation, trouver une condition liant A_0 et K pour que s'établissent des oscillations quasi sinusoïdales. Déterminer alors la fréquence f_0 de ces oscillations.
- 14) Montrer qu'en pratique on obtient des oscillations dont l'amplitude varie temporellement. Exprimer la et représenter la en fonction de t . Dans la pratique, on obtient une stabilisation de l'amplitude à une valeur A_{max} . Expliquer pourquoi et expliciter A_{max} .
- 15) Compte tenu de ce qui précède, représenter l'allure de $u_3(t)$.

I.4) Détection d'un déplacement

On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements X du noyau mobile du capteur précédent dont l'inductance peut être donnée par la loi $L = L_0 \left(1 - \frac{X}{e}\right)$, avec $L_0 = 0,1 \text{ mH}$ et $e = 1 \text{ }\mu\text{m}$. Ce capteur forme la bobine du bloc 1 de la FIGURE 4.

Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence f_{osc} liée à l'inductance L par la relation : $f_{osc} = \frac{D}{\sqrt{L}}$ avec $D = 1$. A la position de référence du capteur ($X = 0$), la fréquence d'oscillation est f_{or} .

16) Montrer que, pour un petit déplacement X ($\frac{X}{e} \ll 1$), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{osc} \approx aX + b$. Expliciter a et b en fonction des données.

17) On note $\Delta f = f_{osc} - f_{or}$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est Δf_{min} . Quel est le plus petit déplacement détectable ?

Données pour la partie I

Constantes physiques :

$$\text{Permittivité diélectrique du vide : } \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{Perméabilité diélectrique du vide : } \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Théorème de Stokes :

Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ

$$\text{de vecteur } \vec{a}, \text{ alors : } \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

II) Câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont des câbles très utilisés dans le domaine de l'électronique.

Un câble coaxial, comme schématisé en FIGURE 5, est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon R_2 . L'espace inter-conducteur comporte un isolant, ici assimilé au vide.

On pose : $R_1 = 0,25\text{mm}$, $R_2 = 1,25\text{mm}$ et $l = 100\text{m}$.

Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord.

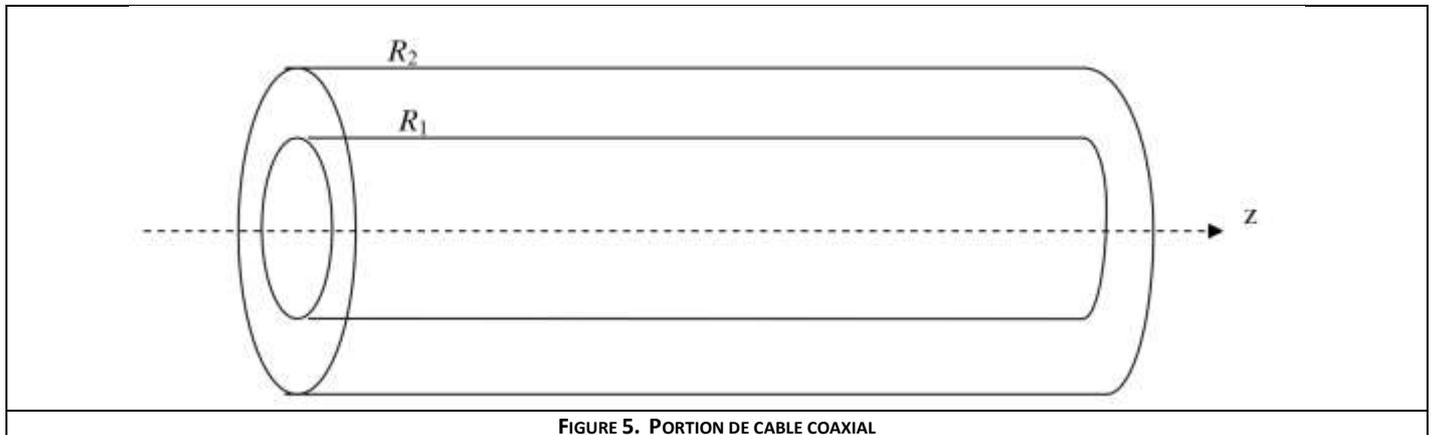


FIGURE 5. PORTION DE CÂBLE COAXIAL

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

II.1) Capacité linéique

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

18) Justifier que en tout point M de l'espace le champ électrique \vec{E} peut s'écrire sous la forme : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

19) De quelle équation de Maxwell découle le théorème de Gauss ? L'énoncer ainsi que le théorème de Gauss.

On démontrera le lien entre l'équation de Maxwell énoncée et la formule intégrale du théorème d'Ampère.

20) Exprimer $E(r)$ en fonction de l , r , Q et ϵ_0 dans les trois domaines suivants : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $r > R_2$

21) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 constants. Exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q , l , R_1 , R_2 et ϵ_0 .

22) On appelle la capacité C_l du câble de longueur l . Exprimer C_l en fonction de l , R_1 , R_2 et ϵ_0 . Montrer alors que la capacité linéique C du câble coaxial peut se mettre sous la forme :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Faire l'application numérique.

23) En déduire l'expression de l'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble coaxial de longueur l . Comment pourriez-vous retrouver son expression sans passer par la valeur de la capacité C_l ?

II.2) Inductance linéique

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$. Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur.

24) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique \vec{B} . Justifier que : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

25) Pour $R_1 < r < R_2$, exprimer $B(r)$ en fonction de I_0 , r et μ_0 .

26) Donner l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique w_m emmagasinée dans le câble coaxial ($R_1 < r < R_2$). Montrer que l'énergie magnétique W_m emmagasinée dans le câble coaxial ($R_1 < r < R_2$) s'écrit :

$$W_m = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) I_0^2$$

- 27)** Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 et l .
28) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0 , R_1 et R_2 .
 Faire l'application numérique.

II.3) Conclusion et bilan énergétique

Les câbles coaxiaux sont conçus pour transmettre des signaux tout en assurant une protection contre les perturbations extérieures.

- 29)** D'après les calculs menés précédemment, expliquer en quoi le câble coaxial permet de protéger le signal transmis des perturbations extérieures.

- 30)** Montrer que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\Pi} = \frac{(V_1 - V_2)I}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{u}_z$$

- 31)** Trouver alors l'expression de la puissance rayonnée P_{ray} à travers une section droite du câble coaxial. Commenter.

Données pour la partie II

Théorème de Green-Ostrogradsky :

Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur \vec{a} . Si les dérivées partielles de \vec{a} sont bornées dans V alors : $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\text{div}\vec{a}) dV$

III) Le silicium

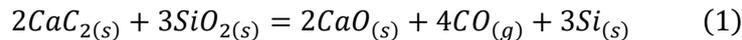
La plupart des circuits intégrés (comme les ALI) utilisent des matériaux de type semi-conducteurs, comme le silicium. On s'intéresse dans un premier temps à sa production, puis dans une deuxième partie à la réalisation d'une diode au silicium. Les données utiles se trouvent en fin de partie III.

III.1) Production du silicium

Réduction du dioxyde de silicium

Pour produire le silicium, on réduit le dioxyde de silicium SiO_2 par le carbure de calcium $CaC_2(s)$. Pour $T < 1683K$, aucun changement d'état n'intervient.

L'équation de la réaction est :



Sa constante d'équilibre est noté K_1^0 .

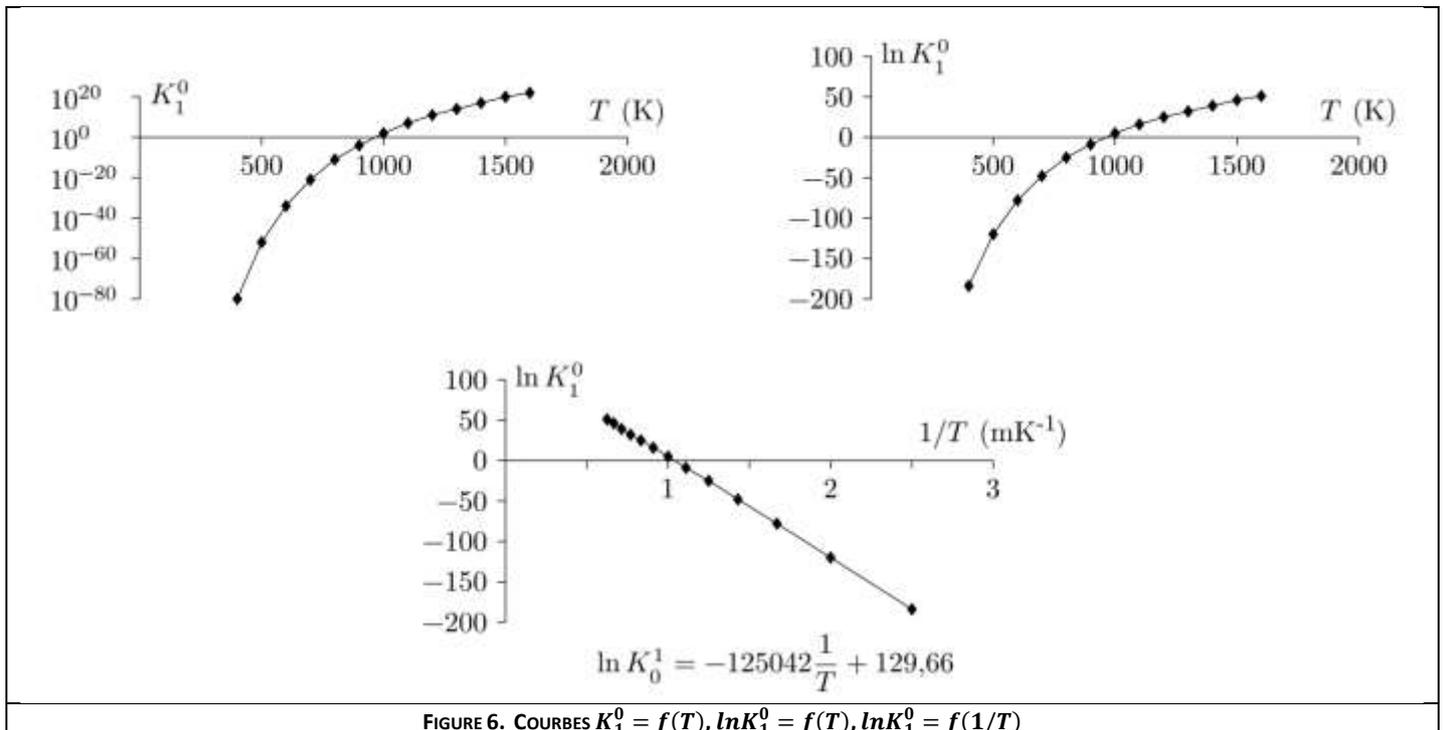


FIGURE 6. COURBES $K_1^0 = f(T)$, $\ln K_1^0 = f(T)$, $\ln K_1^0 = f(1/T)$

- 32)** À l'aide de la FIGURE 6, déterminer le signe de l'enthalpie standard $\Delta_r H_1^0$ de la réaction (1) puis sa valeur en la supposant indépendante de la température.
- 33)** Quelle est l'influence d'une augmentation de la température à pression et composition constante ? Justifier. En déduire si l'industriel a intérêt à travailler à basse ou haute température.

A une température plus élevée

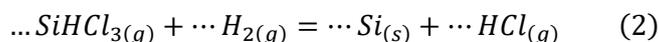
Dans un réacteur de volume constant 8 litres, préalablement vide, on introduit 18 g de SiO_2 solide et 32 g de CaC_2 solide. On opère à $T = 1730K > 1683K$. On suppose que la phase gazeuse est assimilable à un gaz parfait.

- 34)** Ecrire l'équation de la réaction entre $SiO_{2(s)}$ et $CaC_{2(s)}$ que l'on notera (1') en précisant les états physiques des espèces chimiques.
- 35)** En supposant la réaction totale, donner les quantités de matière des différentes espèces chimique à l'état final, ainsi que la pression de la phase gazeuse (supposée parfaite).
- 36)** Sachant que la constante d'équilibre de la réaction (1') vaut : $K_1^0(1730K) = 3,68 \times 10^{24}$, calculer la pression du système si l'équilibre est atteint puis la quantité de matière de monoxyde de carbone formé. Conclure.

Distillation du trichlorosilane

Le silicium obtenu est mis en réaction avec du chlorure d'hydrogène gazeux HCl à $300^{\circ}C$. On forme majoritairement le trichlorosilane $SiHCl_3$ mais également le dichlorosilane SiH_2Cl_2 . Après refroidissement à $15^{\circ}C$, on obtient un mélange liquide de $SiHCl_3$ et de SiH_2Cl_2 de composition molaire 80% en $SiHCl_3$. Une distillation fractionnée permet alors de purifier le trichlorosilane $SiHCl_3$.

Le trichlorosilane ultra-pur est réduit par l'hydrogène vers $1000^{\circ}C$, selon la réaction :



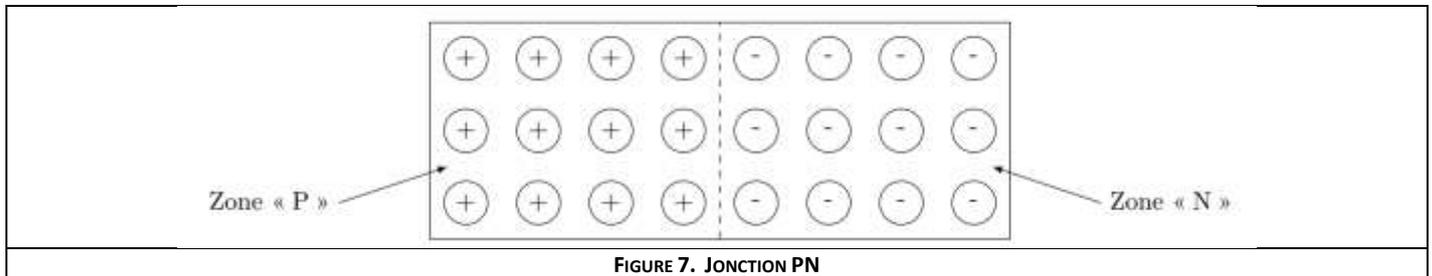
Le silicium ultra-pur, produit par cette réaction, est ensuite déposé sur un barreau de silicium.

- 37)** Ajuster les nombres stœchiométriques de l'équation (2).
- 38)** Que valent à 298K les enthalpies standards de formation de $H_{2(g)}$ et $Si_{(s)}$? Justifier.
- 39)** Calculer l'enthalpie standard $\Delta_r H_2^0$ de la réaction à 298K. Commenter le choix de température.
- 40)** Cette réaction se déroule au contact d'un thermostat qui permet de conserver la température constante. Que vaut alors le transfert thermique fourni au système pour la production d'une mole de silicium.
- 41)** La réaction est réalisée à la pression $P = 0,1\text{bar}$. Justifier le choix de la pression égale à 0,1 bar plutôt que 1,0 bar à température fixée.

III.2) Diode au silicium

Une diode au silicium est constituée d'une jonction de deux semi-conducteurs dopés, l'un de type « P » et l'autre de type « N ».

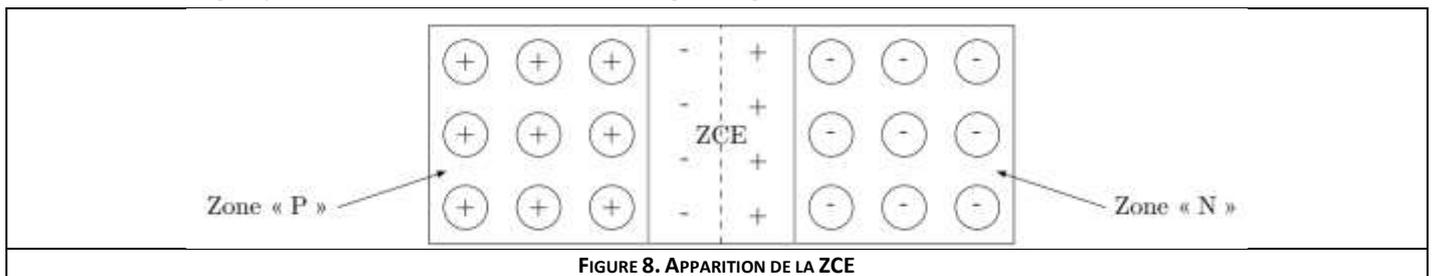
Dans ces deux zones, on ajoute, en quantité limitée, des impuretés dans le silicium de telle façon que la zone « N » contient une majorité d'électrons et une minorité de trous « + » (d'où sa charge négative) alors que la zone « P » contient une majorité de trous « + » et une minorité d'électrons (d'où sa charge positive) comme illustré FIGURE 7 où seuls les porteurs majoritaires ont été représentés.



La proximité de ces deux zones va entraîner une migration des trous vers la zone « N » ainsi que des électrons vers la zone « P ».

Lorsqu'un électron migre vers la zone « P », il va se recombiner avec un trou et cela entraîne l'apparition d'un trou dans la zone « N » ; un raisonnement analogue peut être tenu en ce qui concerne la migration d'un trou « P » vers la zone « N ».

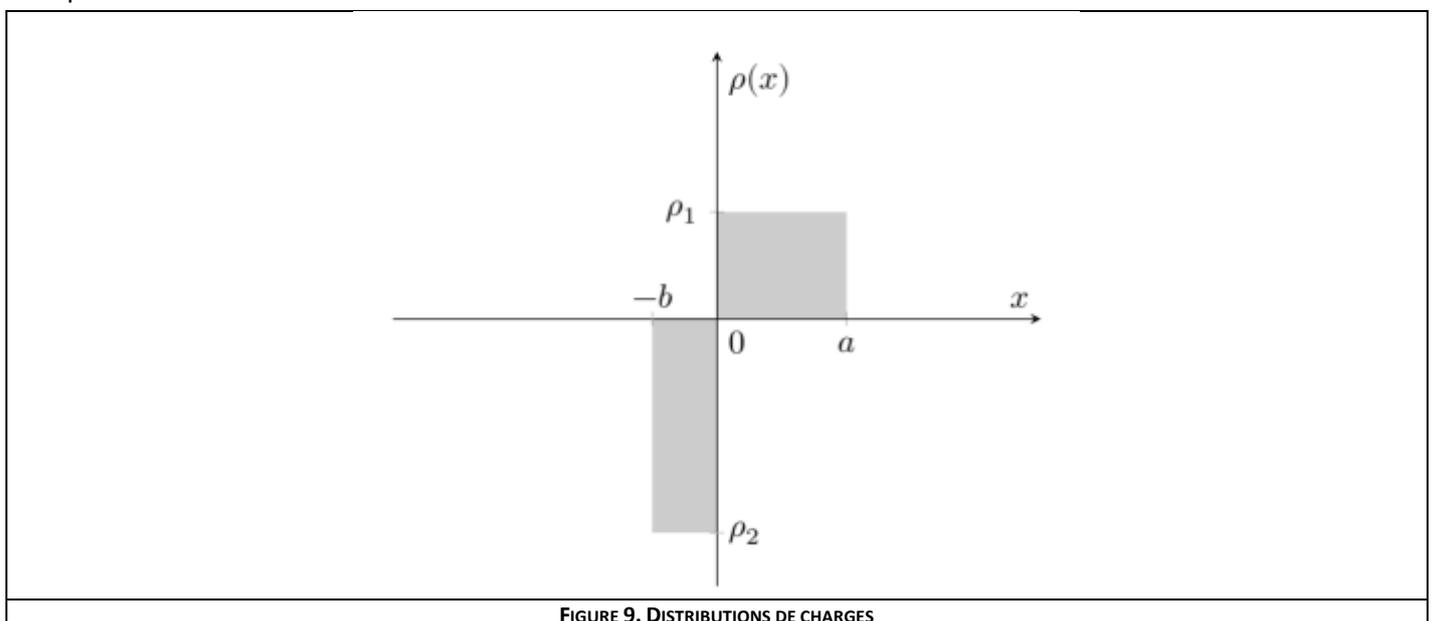
Tout ceci entraîne une zone appelée zone de charge d'espace, notée ZCE, dans laquelle la zone « N » se trouve localement chargée positivement et la zone « P » chargée négativement comme illustré FIGURE 8.



42) Préciser pourquoi la ZCE est nécessairement limitée dans l'espace.

On se propose d'étudier le vecteur champ électrostatique dans la ZCE.

La zone de charge d'espace est modélisée par deux distributions uniformes (FIGURE 9), l'une de densité volumique $\rho_1 > 0$ entre les plans d'équations $x = 0$ et $x = a$, l'autre de densité volumique $\rho_2 < 0$ située entre les plans d'équations $x = -b$ et $x = 0$.



- 43) La ZCE étant globalement neutre, déterminer la relation entre a , b , ρ_1 et ρ_2 .
- 44) On considère le cas d'une distribution uniforme de densité volumique ρ_0 comprise entre les plans d'équations $x = -\frac{d}{2}$ et $x = +\frac{d}{2}$ où d est une largeur. Démontrer soigneusement que le vecteur champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace est de la forme :

$$\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$$

- 45) A l'aide du théorème de Gauss, déterminer soigneusement l'expression de $E(x)$ en tout point de l'espace. On montrera en particulier que :

$$E(x) = \frac{\rho_0 x}{\epsilon_0} \text{ si } |x| < \frac{d}{2}$$

- 46) À l'aide du principe de superposition, déterminer le vecteur champ électrostatique en tout point M de la ZCE précédemment décrite. On exprimera $E(x)$ en fonction de x , ρ_1 , a et b .
- 47) Représenter les variations de $E(x)$ pour x variant de $-b$ à a .
- 48) À l'aide de l'étude précédente, indiquer la valeur minimale de la tension $U = V_p - V_N$ à appliquer afin qu'un courant circule dans la diode.

Données pour la partie III

Extrait du tableau périodique des éléments :

	H	C	N	O	Al	Si	Cl	Ca
Numéro atomique	1	6	7	8	13	14	17	20
Masse molaire ($g.mol^{-1}$)	1,01	12,0	14,0	16,0	27,0	28,1	35,5	40,1

Relation de Van't Hoff :

$$\frac{d \ln K^0(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0(T)}{RT^2}$$

Données thermodynamiques :

	$Si_{(s)}$	$SiO_{2(s)}$	$SiHCl_{3(g)}$	$H_{2(g)}$	$HCl_{(g)}$	$CaC_{2(s)}$	$CaO_{(s)}$
Température de fusion T_{fusion} (K)	1683	1883	139	14	159	2430	2886
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^0$ ($kJ.mol^{-1}$)	?	-911	-488,5	?	-92,3	-63	-635

Détection de pétrole

On souhaite dans ce problème mesurer la variation de l'accélération de la pesanteur en cas de présence de nappe de pétrole. On étudiera pour cela dans un premier temps sa variation, puis le capteur qui permet la mesure.

Avant d'être acheminé par oléoduc, le pétrole doit être détecté dans le sous-sol puis extrait. La méthode de prospection dite « sismique réflexion » est couramment employée. Cette technique indirecte passe par l'analyse de la propagation d'ondes sismiques dans le sol, permettant de découvrir des pièges, c'est-à-dire des structures géologiques susceptibles de contenir des hydrocarbures, tels les anticlinaux.

I) Estimation de l'anomalie gravitationnelle due à la présence de pétrole

On cherche à estimer la variation Δg du champ gravitationnel, qu'on suppose ici confondu avec le champ de pesanteur, détectée par un avion qui survole la région prospectée.

Dans le premier cas (FIGURE 10 gauche), l'avion survole une étendue supposée plane et homogène. Le champ gravitationnel vaut alors $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Dans le second cas (FIGURE 10 droite), l'avion survole une zone identique à ceci près qu'une nappe de pétrole, assimilée à une couche plane homogène d'épaisseur H , est présente dans le sous-sol. Le champ de pesanteur mesuré est alors $-(g - \Delta g)\vec{u}_z$. On note ρ_s la masse volumique du sol et ρ_p celle du pétrole.

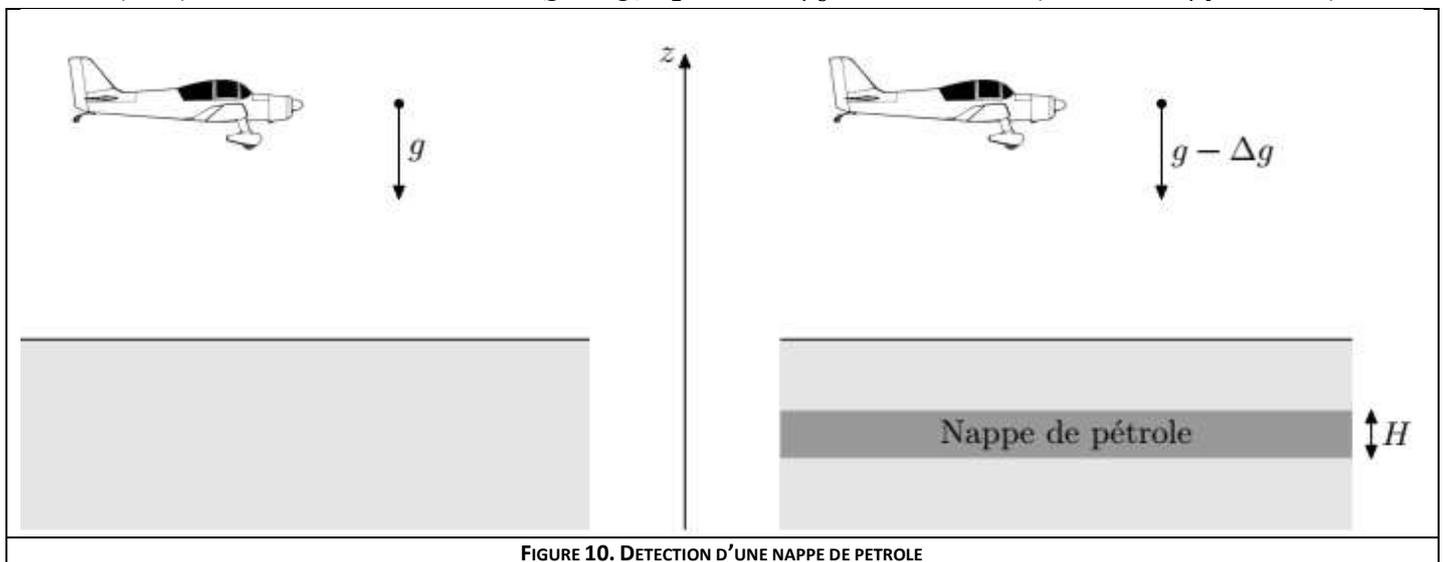


FIGURE 10. DETECTION D'UNE NAPPE DE PETROLE

Afin d'exprimer Δg , on s'intéresse tout d'abord au calcul du champ gravitationnel \vec{g}_c créé à l'extérieur d'une couche plane homogène d'épaisseur H et de masse volumique ρ_c , supposée seule dans l'espace (FIGURE 11).

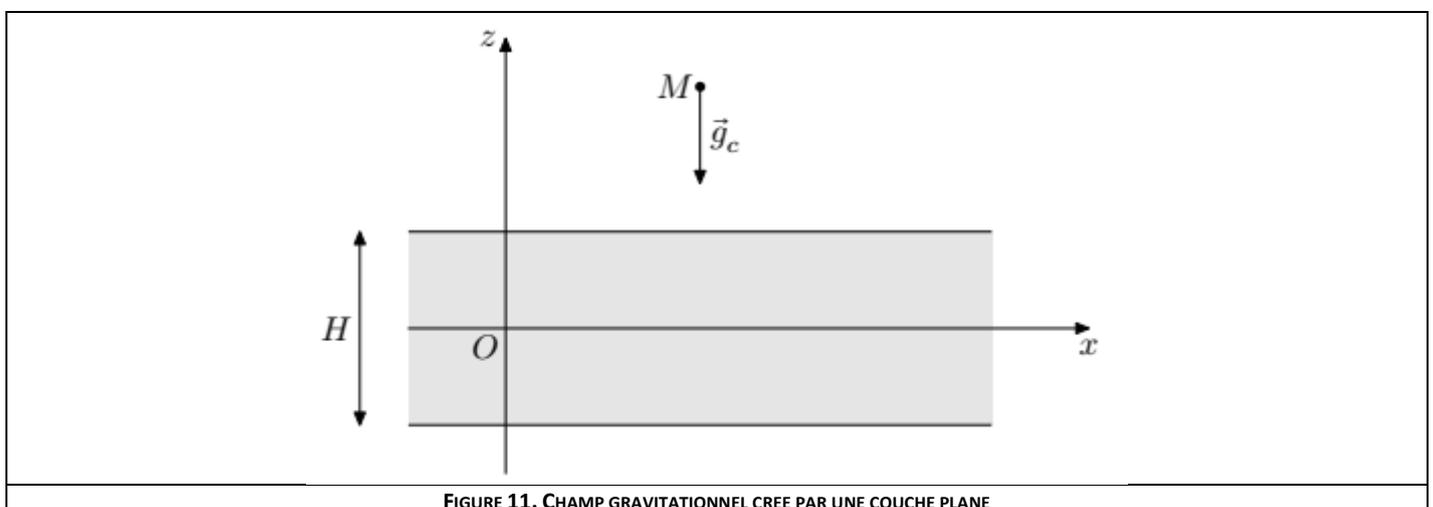


FIGURE 11. CHAMP GRAVITATIONNEL CREE PAR UNE COUCHE PLANE

La couche plane est comprise entre les plans d'équations $z = -H/2$ et $z = +H/2$. Elle est supposée d'extension spatiale infinie selon les directions (Ox) et (Oy) (les effets de bord sont donc négligés).

Le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel g_c s'écrit :

$$\oiint \vec{g}_c \cdot \vec{dS} = -4\pi Gm$$

Où m est la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée à travers laquelle on calcule le flux de \vec{g}

- 49)** Donner, en les nommant, les grandeurs analogues à \vec{g}_c , m et G dans le théorème de Gauss de l'électrostatique.
- 50)** Justifier le fait que le champ gravitationnel a pour forme : $\vec{g}_c = g_c(z) \vec{u}_z$.
- 51)** Établir, en illustrant votre démonstration par une figure avec une légende explicite, que : $g_c = -2\pi G\rho_c H$ dans toute la partie située au-dessus de la couche plane.
- 52)** Exprimer l'anomalie gravitationnelle Δg en fonction de G , H , ρ_p et ρ_s . Calculer Δg . Donnée : $H = 200 \text{ m}$.

Données pour la partie I

Masse volumique du pétrole : $\rho_p = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Masse volumique du sol : $\rho_s = 2800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{11} \text{ USI}$

Aide aux calculs : $\pi \times 8 \times 6,67 = 168$

II) Mesure de l'anomalie gravitationnelle

La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des capteurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques embarqués.

Concrètement, le capteur est réalisé à la surface d'une tranche de silicium (« wafer »). Après réalisation, on observe par microscopie électronique que la surface du composant présente des micro-structures en silicium telles des micro-poutres, des microlamelles, etc. Les dimensions typiques des éléments de ces structures sont de 1 à 100 μm .

Les photographies en FIGURE 12 montrent la « masse sismique » (la partie centrale ajourée ou « beam ») dont on étudie le mouvement et qui subit globalement les effets de l'accélération à mesurer. Celle-ci est reliée « au bâti » par des micro-poutres d'ancrage (« anchor »).

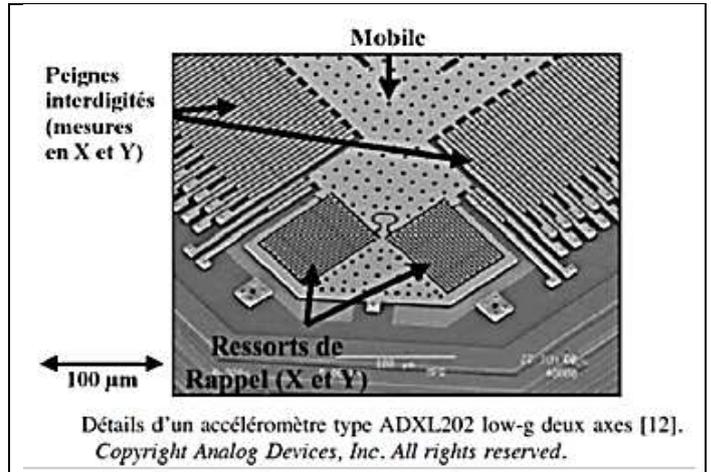


FIGURE 12. TECHNOLOGIE DU CAPTEUR

On s'intéresse dans cette partie au système de détection du déplacement X de la masse mobile de l'accéléromètre pour cela on utilise un condensateur à écartement variable.

Une approche simple, dont le principe est représenté sur la FIGURE 13, consiste à mesurer la capacité d'un condensateur dont une électrode, liée à la masse mobile, fait face à une électrode fixe liée au boîtier de l'accéléromètre. Le déplacement de la masse mobile (lié à la valeur de l'accélération de la pesanteur) modifie la distance entre les deux électrodes et par voie de conséquence la capacité du condensateur.

On applique une différence de potentiel $U = V_a$ entre les deux électrodes, l'électrode fixe étant portée au potentiel V_a et l'électrode mobile étant reliée à la masse. Les deux électrodes sont assimilées à deux plans infinis parallèles séparés d'une distance $e + X$. Les charges qui apparaissent sur chacune des électrodes se répartissent uniformément en surface. On note $+\sigma$ la charge surfacique portée par l'électrode fixe liée au boîtier.

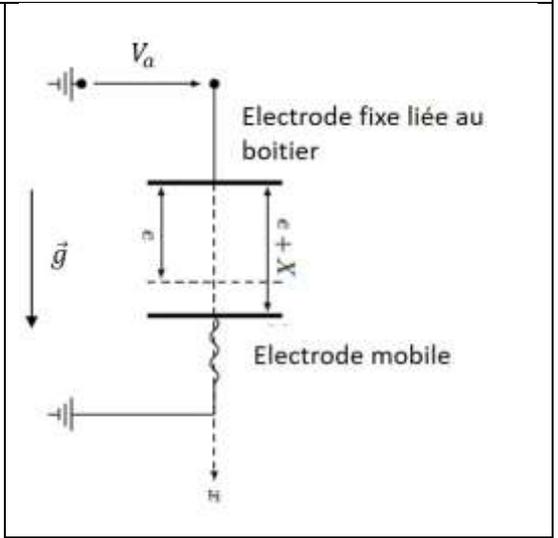


FIGURE 13. CONDENSATEUR FORME PAR LES DEUX ELECTRODES

Le condensateur précédent donc la capacité dépend de l'espacement de ses électrodes et donc des forces auxquelles est soumise l'armature mobile (dont le poids) est inséré dans un oscillateur à relaxation. Nous voulons montrer dans cette partie que la variation de la fréquence du signal oscillant nous permettra de mesure l'accélération de la pesanteur.

On peut alors utiliser la structure de l'oscillateur à relaxation présentée en FIGURE 14.

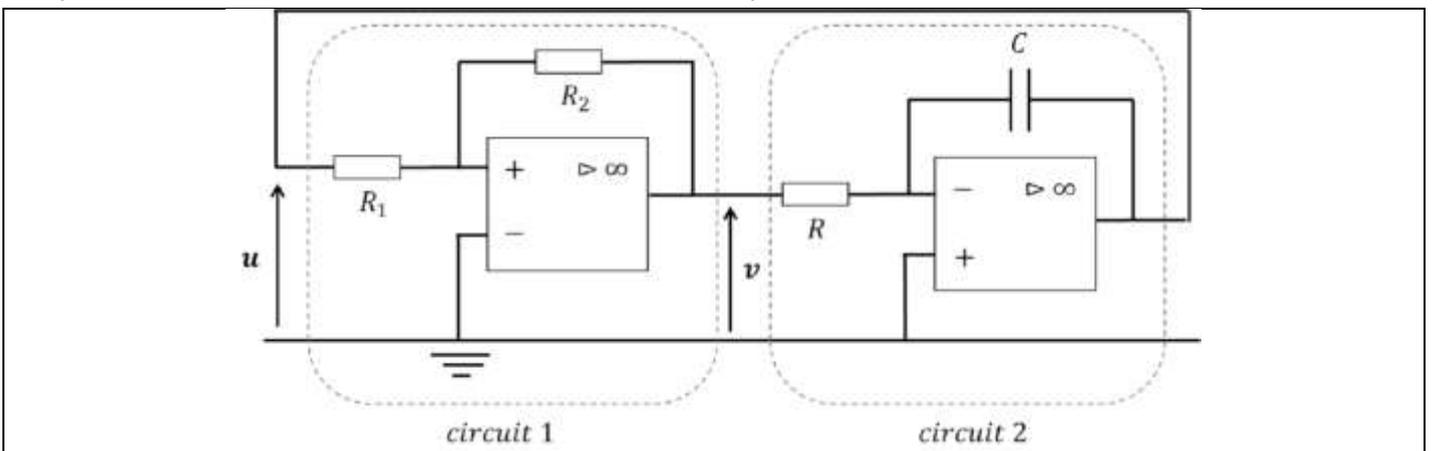


FIGURE 14. OSCILLATEUR A RELAXATION

On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ leurs tensions de saturation. A $t = 0s$, on suppose que la tension v vaut $+V_{sat}$ et que la tension u est nulle.

A) Circuit 1

53) Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Pour quelle valeur de la tension d'entrée u , notée u_{seuil1} , la tension de sortie v bascule-t-elle de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$?

On admet que la tension de sortie v bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ pour une valeur de tension u_{seuil2} telle que $u_{seuil2} = -u_{seuil1}$.

54) Tracer la tension v en fonction de la tension u en annotant soigneusement le tracé.

B) Circuit 2

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur. On admet la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC}$$

55) Si la tension v est constante et vaut $+V_{sat}$, quelle est l'allure du signal d'entrée u ?

C) Montage complet

Etudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions u et v sont donnés en FIGURE 15.

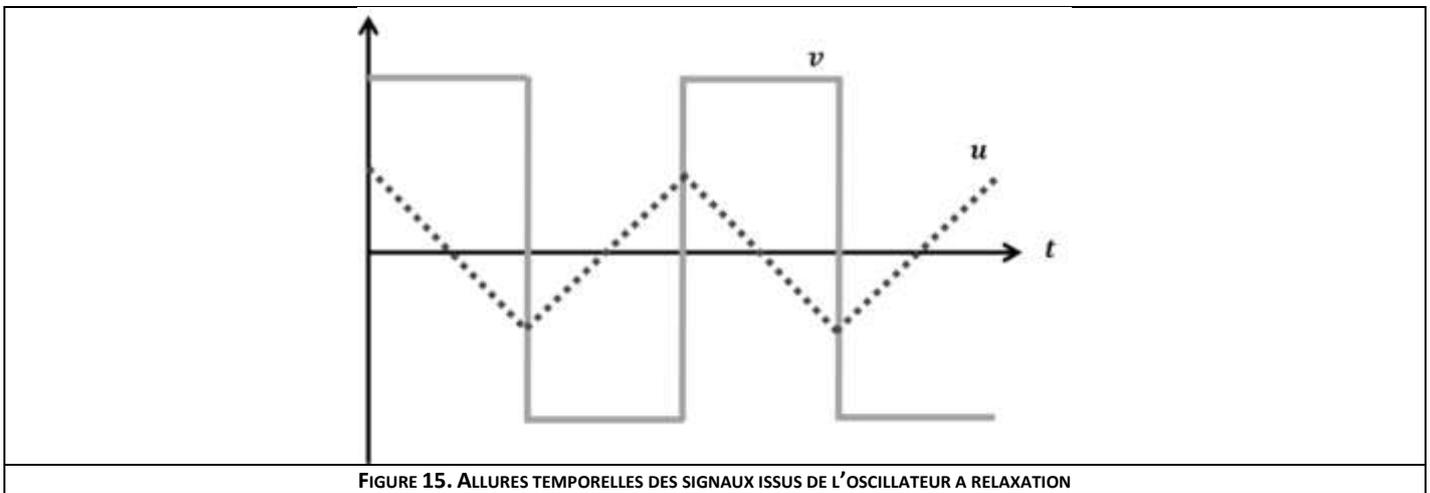


FIGURE 15. ALLURES TEMPORELLES DES SIGNAUX ISSUS DE L'OSCILLATEUR A RELAXATION

56) Exprimer la fréquence f de la tension u en fonction de R_1 , R_2 , R et C .

57) Commenter. On pourra dans cette question essayer de relier la fréquence de l'oscillateur à la variation X d'écartement des armatures du condensateur, sensible à la variation de pesanteur.