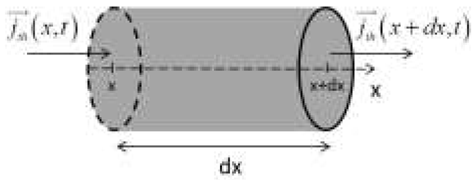
Nom :

Interrogation de cours

1) Démontrer l'équation de la chaleur en faisant un bilan enthalpique sur une épaisseur dx de matériau de conductivité λ .

Hypothèses :

On considère le même solide homogène de forme cylindrique que précédemment. Il est de masse volumique μ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c. Ces grandeurs sont supposées constantes dans le domaine de température étudié. On considère la pression Pextérieure constante.



On étudie toujours un modèle unidimensionnel selon (Ox), la température ne dépend donc que de x et t : $T(x,t)$. On considère un petit volume compris entre les abscisses x et $x+dx$ de section Σ.

Le système reçoit la puissance thermique suivante :

$$d\Phi = \Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}\Sigma dx \quad car \quad \Phi(x,t) = j_{th}(x,t)\Sigma$$

Or, la pression étant constante, sans travail supplémentaire, on a : $dH = \delta Q$

La puissance thermique apportée sert à chauffer le solide tel que :

$$dH = CdT = cmdT = c\mu dVdT = c\mu\Sigma dxdT \quad \Rightarrow \quad d\Phi = \frac{\delta Q}{dt} = c\mu\Sigma dx\frac{dT}{dt}$$

En égalant les deux expressions, on trouve : $-\frac{\partial j_{th}}{\partial x}\Sigma dx = c\mu\Sigma dx\frac{\partial T}{\partial t}$

On considère que le transfert thermique ne s'effectue que par conduction.

Loi de Fourier : $j_{th}(x,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right) + c\mu\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{c\mu}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

2) Résoudre l'équation de la chaleur dans le cas du régime stationnaire.
On prendra le cas d'une tige pour rester avec un problème unidimensionnel. On suppose donc de plus qu'il n'y a aucun échange thermique entre la tige et le milieu extérieur par la surface latérale du cylindre (isolation thermique).
Cette tige est cylindrique de section S, de longueur L et ses extrémités sont aux températures T_1 et T_2 $(T_1 > T_2)$.
Donner l'expression de la température, densité de flux thermique et flux thermique. Commenter.

Régime stationnaire : la température ne dépend plus du temps

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

On utilise les deux conditions aux limites pour déterminer la loi affine vérifiée par la température : $T(0) = T_1 = B$ et $T(L) = T_2 = AL + T_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$

D'après la loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right) = -\lambda\frac{T_2 - T_1}{L} = \lambda\frac{T_1 - T_2}{L}$

Donc le flux thermique traversant la tige est égal à : $\Phi = j_{th}\Sigma = \lambda\Sigma\frac{T_1 - T_2}{L}$

C'est une constante.

3) Définir la notion de résistance thermique. Donner l'analogie avec l'électricité.

En régime stationnaire, on définit la résistance thermique R_{th} (en K.W^{-1}) de la tige comme : $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{L}{\lambda S}$

Electrique	***Thermique***
Potentiel V	*Température T*
Courant I	*Flux thermique Φ*
Conductivité électrique σ	*Conductivité thermique λ*